División de CBI

Introducción al Álgebra Lineal

Guía del curso CSAI81-13P

Por

J. Cruz Sampedro

Índice

Información general

*"No hay genios en este mundo, todo es trabajo tenaz,
el uno por ciento es inspiración y el noventa y nueve transpiración."*

Thomas Alva Edison (1847-1931)

¡Bienvenido al SAI!

Los profesores de los cursos de Introducción al Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales CSAI81 del *Sistema de Aprendizaje Individualizado* (SAI), te damos la más cordial bienvenida y te deseamos una placentera y exitosa experiencia en este sistema de aprendizaje. En estos cursos del SAI tenemos el compromiso de brindarte todo el apoyo que necesites para que aprendas álgebra lineal en un ambiente cordial, responsable y respetuoso, en el que goces de plena libertad y confianza para interactuar activamente con nosotros: *dialogando, preguntando, argumentando, proponiendo soluciones y resolviendo tus dudas.*

¿Qué es el SAI?

El SAI es una modalidad de enseñanza fundada en la *continua interacción entre los alumnos y sus profesores.* En el SAI *no asistes a clases* pero dispones de *mucha asesoría individual,* así como de flexibilidad para *aprender a tu ritmo.* Por eso es *importantísimo* que te *presentes regularmente a asesoría* y te mantengas en constante contacto con tus profesores.

En CSAI81 queremos convencerte que
¡LA MATEMÁTICA NO ES UN JUEGO DE ESPECTADORES!

¿Qué no es el SAI?

- El SAI no es un sistema para *autodidactas,* ni de *enseñanza abierta* ni de *educación a distancia.*
- El SAI tampoco es un sistema de *cursos en línea* ni de *educación virtual.*
- El SAI no es una *reguladora* ni un sistema de *clases particulares.*

  ¡Cuidado, aprender a tu ritmo no quiere decir estudiar a tu ritmo! Por eso,
- El SAI NO ES PARA QUE VENGAS CUANDO QUIERAS Y DEJES TODO PARA EL FINAL DEL TRIMESTRE.

¿Cómo se aprende álgebra lineal en CSAI81?

En CSAI81 aprenderás los temas de Introducción al Álgebra Lineal realizando las actividades que se especifican en esta *guía,* con ASESORÍA y APOYO PERMANENTE de los profesores. La guía te indica paso a paso qué materiales debes estudiar y qué ejercicios debes resolver para cubrir *todos los temas del curso.* Los profesores supervisarán tus avances y te brindarán *toda la asesoría que necesites* para resolver tus dudas hasta que te sientas listo para *presentar tus exámenes.*

Nuestro **método de enseñanza** se funda esencialmente en:

1. *La abundante asesoría individual,* para que resuelvas tus dudas, profundices en los temas, fortalezcas tu independencia y prepares tus exámenes.

2. *La evaluación presencial de tareas y exámenes:* en CSAI81 todas tus tareas y exámenes se califican en tu presencia para que inmediata y oportunamente resuelvas tus dudas, afirmes tus aciertos y detectes y corrijas tus errores.

3. *Las numerosas oportunidades para aprobar los exámenes:* EN LUGAR DE REPROBARTE EN LOS EXÁMENES, en CSAI81 te resolvemos tus dudas, te asignamos tareas para que repases y te damos oportunidad de presentar nuevamente los exámenes, *hasta que los apruebes.*

4. *La flexibilidad para que aprendas y progreses a tu propio ritmo:* en CSAI81 puedes terminar un curso y empezar con el siguiente o puedes reanudar el curso en donde te quedaste y completarlo en dos trimestres:
   ESTUDIAR ÁLGEBRA LINEAL EN CSAI81 PUEDE SER LENTO, ¡PERO ES SEGURO!

Una de nuestras metas fundamentales es que desarrolles tu *autodisciplina*, *seguridad* e *independencia* para alcanzar tus metas académicas y profesionales.

¿Qué tengo que hacer?

- Descargar e imprimir esta guía.

- Leer cuidadosamente la información del curso para el trimestre 13I y familiarizarte con los *horarios de atención* y los *criterios de evaluación.*

- Conseguir el libro de texto y estudiarlo de acuerdo al plan trazado en la guía.

- *¡Asistir al SAI a asesoría cada vez que tengas dudas!*

  La atención a los alumnos de álgebra lineal CSAI81 se da en el Aula E204, los lunes miércoles y viernes de 15:00 a 16:30 horas.

- Entregar la tarea de la primera unidad correctamente resuelta.

- Presentar tu examen y continuar trabajando bajo la constante supervisión de los profesores.

Guía y libro de texto

"Sin entusiasmo nunca se logró nada grandioso"

Emerson (1803-1882)

El éxito en el estudio de las matemáticas requiere de *entusiasmo, dedicación y organización. El entusiasmo y la dedicación son tu responsabilidad* pero una buena organización requiere de una *guía,* un *libro de texto* y supervisión, orientación y apoyo por parte de tus profesores.

El propósito de esta guía es proveerte un plan de trabajo para que estudies organizadamente y asimiles en un trimestre los contenidos del curso: Introducción al Álgebra Lineal.

El **libro de texto** es:

Álgebra Lineal, S. Grossman, Mc Graw Hill; 2007, sexta edición.

Para que tu aprendizaje progrese de manera ordenada y sistemática, así como para facilitar la supervisión de tus avances, el curso se ha dividido en *diez unidades.* Cada unidad establece su *contenido,* sus *objetivos* y las *actividades* que debes realizar para preparar los correspondientes exámenes.

¡Imprime la guía y adquiere el libro de texto! Es muy importante que dispongas de estos materiales durante todo el trimestre porque –sumados a tu dedicación y al apoyo de tus profesores– serán los principales soportes de tu aprendizaje de álgebra lineal en CSAI81.

Información de Introducción al Álgebra Lineal CSAI81-13P

"Donde se cuentan mil zarandajas, tan impertinentes como necesarias para el entendimiento de esta grande historia"

Miguel de Cervantes (1547-1616)

A continuación encontrarás información fundamental para el desarrollo de tu trabajo en el curso de Introducción al Álgebra Lineal CSAI81. Es muy importante que prestes especial atención a *los objetivos del curso, los criterios de evaluación y las reglas de comportamiento.*

Objetivos

El propósito de este curso es que aprendas los métodos y conceptos matemáticos esenciales del álgebra lineal. Los **objetivos generales** son:

- Manejar los conceptos básicos del álgebra lineal.
- Manejar los conceptos y técnicas de transformaciones lineales y el lenguaje del álgebra lineal para su aplicación a problemas de ingeniería

Guía y libro te texto

La guía del curso está basada en el libro de texto:

Álgebra Lineal, S. Grossman, Mc Graw Hill; 2007, sexta edición.

Es indispensable que dispongas de una copia (impresa o electrónica) de este libro y de la guía del curso.

Profesores

- Dr. Salvador Arellano Balderas, sab@correo.azc.uam.mx
- Dr. Jaime Cruz Sampedro, jacs@correo.azc.uam.mx

Es importante que sepas que los profesores de Introducción al Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales CSAI81 trabajaremos en equipo. Esto significa que ambos estaremos en plena disposición para darte asesoría y resolver tus dudas en ambos cursos. Además, cualquiera de nosotros te podrá supervisar tu desempeño y evaluar el desarrollo de tu trabajo. **Tu calificación del curso será la que cualquiera de nosotros te otorgue cuando termines la décima unidad.**

Horario de atención y asesorías

Horario

Lunes, miércoles y viernes de 15:00 a 16:30:00 hrs, en el Aula E204.

Asesorías

Para recibir asesoría es necesario que *hayas estudiado* el material correspondiente en tu libro de texto, que *hayas intentado* los ejercicios y que tus preguntas sean concretas y bien formuladas. Puedes asistir a asesoría tantas veces como quieras. Los profesores están para ayudarte a resolver tus dudas, *¡piérdeles el miedo!* Si necesitas asesoría adicional, *solicítala a cualquiera de los profesores del curso* o acude al *Centro de Matemáticas*: E201.

Exámenes y tareas

Una de las actividades más importantes para la supervisión de tus avances en el curso es la revisión de tus tareas y exámenes. Por esta razón, es muy importante que realices esta actividad con apego a la siguientes normas:

1. Para solicitar evaluación de una unidad es necesario que:
   - Hayas aprobado todas las unidades anteriores.
   - Hayas entregado tu tarea, *completa, bien escrita, correctamente resuelta, bien engrapada y en limpio.*
   - Hayas aprobado un breve pre-examen que te asigne uno de los profesores.
   - Dispongas de TRES hojas engrapadas tamaño carta, sin flecos y que no sean de re-uso, para realizar tu examen.
2. Al recibir la hoja de examen, asegúrate de firmar el registro de exámenes y que tu examen quede registrado en tu expediente.
3. Al terminar tu examen, solicita a cualquiera de los profesores que te lo califique y asegúrate que tu calificación quede registrada en tu expediente.
4. **Copiar ó dejar copiar en los exámenes es un delito académico grave porque fomenta la corrupción y la mediocridad.** Por este motivo, si se te sorprende copiando o dejando copiar reciclarás el examen. *Si reincides recibirás NA en el curso, sin opción para concluirlo en CSAI81.*
5. En los exámenes de álgebra lineal **no se permite usar el libro de texto ni formularios personales.**

Tus tareas y exámenes se calificarán en tu presencia para que *confirmes tus aciertos* y *detectes y corrijas tus errores oportunamente*. En caso de que no apruebes algún examen, haremos de cuenta que no lo presentaste y te asignaremos una tarea para que repases los temas que no dominas y presentes otro examen de la misma unidad. A este procedimiento del SAI se le denomina **reciclar** y deberás repetirlo en cada unidad hasta que la apruebes.

Criterios de evaluación

1. Para pasar el curso debes aprobar las diez unidades que se especifican en esta guía.
2. Las calificaciones de las unidades 1, 2, 3, 5, 6, 8 y 9 serán *cualitativas* (A de aprueba o R de recicla).
3. Las calificaciones de las unidades: 4, 7 y 10 serán *numéricas* (de 6 a 10 si apruebas) o R si reciclas.

4. Para mejorar tus calificaciones aprobatorias de estas unidades puedes presentar otro examen, pero debes hacerlo antes de iniciar la evaluación de la siguiente unidad.

5. Para evaluar tu desempeño en el curso, tus calificaciones de las unidades 4, 7 y 10 se ponderan de la siguiente manera:

   unidad 4: 25 %, **unidad 7: 35 %,** **unidad 10: 40 %.**

   Si x denota tu calificación numérica, tu **calificación final** estará dada por

$$F(x) = \begin{cases} MB, & \text{si} \quad 9 \leq x \leq 10, \\ B, & \text{si} \quad 7.5 \leq x < 9, \\ S, & \text{si} \quad 6 \leq x < 7.5. \end{cases}$$

6. Puedes mejorar tu calificación final sometiéndote a otro examen global.

7. Si para el último día de evaluaciones del trimestre no has aprobado el curso tu calificación final será NA, pero podrás *avanzar o terminar* en la semana de exámenes de recuperación.

8. **Nota importante:** *la carta para inscribirse al examen de recuperación se dará únicamente a los alumnos que hayan aprobado la novena unidad.* Aquellos que necesiten presentar la unidad faltante en recuperación deberán hacerlo en el primer día del periodo de exámenes.

9. Si no terminas el curso en la semana de recuperación pero *cuentas con cinco unidades aprobadas*, puedes reanudando en donde te quedaste (pero debes concluirlo) en el trimestre siguiente.

10. **Oyentes.** Solamente podrán ser oyentes aquellos alumnos que en su segunda inscripción hayan sido estudiantes de álgebra lineal en SAI y tengan al menos cinco unidades aprobadas. **Todos los oyentes deben concluir el curso en las primeras cinco semanas del trimestre.**

Comportamiento

Por respeto a tu Alma Mater y al trabajo de los demás:

- No dañes el mobiliario. *El estudiante de álgebra lineal CSAI81 que sea sorprendido dañando el mobiliario recibirá NA en el curso, sin opción para concluirlo en CSAI81, y será reportado al Coordinador del SAI.*
- En el salón de exámenes y en el área de atención del SAI, *controla tu lenguaje, modera el volumen de tu voz y apaga tu celular, iPod, iPad, iPhone, smartphone, gadget,* etc. Los profesores se reservan el derecho de suspender la asesoría o el examen a los estudiantes que violen esta norma.

Recomendaciones

"Ser consciente de la propia ignorancia es un gran paso hacia el saber."

Benjamin Disraeli (1804-1881)

1. ¡Comprométete con tu educación, asumiendo tu papel de estudiante con responsabilidad, entusiasmo y dedicación!

2. Adquiere la disciplina de trabajar al menos dos horas diarias para este curso. Te recomendamos hacerlo en las instalaciones del SAI. *Aprende a trabajar solo y en equipo.*

3. Antes de intentar los ejercicios, estudia detenidamente en tu libro de texto los temas que se indican en la guía.
4. Esfuérzate por aprender a manipular expresiones algebraicas y a calcular correctamente con rapidez, precisión e ingenio.
5. Aprende a distinguir las ideas importantes en las soluciones de los problemas y ejercicios y a reproducirlas sin ayuda.
6. Razona detenidamente todos los problemas que se te asignan en la guía; *inténtalos muchas veces y ¡no tengas miedo a equivocarte!* Se aprende mucho de los errores; ¡lo malo es quedarse con la duda!
7. La mejor manera de saber si estás entendiendo un tema de matemáticas es tratando de resolver los problemas sin ayuda. Inténtalos y si tienes dificultades, discútelas con tus compañeros o *¡ve a asesoría al SAI o al Centro de Matemáticas!*
8. Es muy importante para tu formación profesional que adquieras el hábito de reportar tu trabajo en limpio y bien presentado; *escrito en forma clara, concisa y ordenada, con tus propias palabras, con buena ortografía, utilizando correctamente la notación matemática y con diagramas y gráficas bien hechas.*
9. Adquiere el hábito de criticar tu mismo tu trabajo y de mejorarlo siempre que le encuentres fallas.
10. Aprende a usar el formulario, tu calculadora, Maple, SAGE, Matlab o Mathematica *(Maple 5 y SAGE son software libre; Mathematica está disponible en el Edif. T y en las computadoras del SAI).*

"La tolerancia que se advierte y elogia a menudo en algunos hombres no es más que el resultado de su más profundo desprecio por el resto de los humanos. Cuando un grande ingenio está enteramente penetrado de este menosprecio, cesa de considerar a los hombres como semejantes suyos y de exigirles lo que se exige de sus iguales. Es tan tolerante entonces con ellos como con todos los demás animales, a los que no tenemos por qué acusarles de su falta de razón y de su bestialidad."

Shopenhauer

Unidades del curso

"Il libro della natura é scritto in lingua matematica."

Galileo Galilei (1564-1642)

"El gran libro de la naturaleza permanece siempre abierto ante nuestros ojos y en sus páginas se encuentra la verdadera filosofía ... Pero no nos es posible leerlo a menos que conozcamos los caracteres y el lenguaje en el que está escrito ... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas."

Galileo Galilei (1564-1642)

"Un problema de física, ingeniería o matemáticas que se puede reducir a un problema de álgebra lineal, puede considerarse un problema resuelto"

Peter Lax (1926-)

Unidad 1

Vectores en el plano y el espacio

Objetivo

Repasar las propiedades algebraicas y geométricas básicas de los vectores en los espacios de dos y tres dimensiones.

Contenido

1. Vectores en el plano y en el espacio.
2. Magnitud y dirección de un vector.
3. Suma y producto por escalar de un vector.
4. Producto escalar y proyecciones.
5. Ángulo entre vectores.
6. Producto cruz
7. Rectas y planos en el espacio.

Actividades

1. Esta unidad es esencialmente de repaso. Te conviene repasar el Capítulo 3 de la Sexta edición del Grossman y resolver ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 2.

Tarea de la unidad 1

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque
aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza
hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Dibuja los siguientes vectores y encuentra su magnitud, su dirección y un vector unitario que tenga la misma dirección:

$$\mathbf{v} = (-3, 3), \qquad \mathbf{v} = (\sqrt{3}, -1), \qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}.$$

2. Si $\mathbf{a} = (2, -1)$ y $\mathbf{b} = (-1, 1)$, encuentra y dibuja

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{a} - \sqrt{2}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{v} = -3\mathbf{a} - \pi\mathbf{b}, \qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}.$$

3. Encuentra dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

4. Encuentra un vector $\mathbf{v}$ que tenga la magnitud y dirección dadas.

$$|\mathbf{v}| = 3, \quad \theta = 5\pi/6; \qquad |\mathbf{v}| = 4, \quad \theta = 4\pi/3; \qquad |\mathbf{v}| = 2, \quad \theta = \pi/6.$$

5. Si $\mathbf{a} = (2, \alpha)$ y $\mathbf{b} = (3, -1)$, determina α para que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ sean

(a) ortogonales, (b) paralelos, (c) formen un ángulo de 60°.

6. Para cada uno de los siguientes pares de vectores calcula la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = (1, 3), \quad \mathbf{u} = (2, 2); \qquad \mathbf{u} = (-1, 3), \quad \mathbf{v} = (2, -2); \qquad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

7. Dibuja los siguientes vectores y encuentra su magnitud, sus cosenos directores y un vector unitario que tenga la misma dirección:

$$\mathbf{v} = (1, 1, 1), \qquad \mathbf{v} = (\sqrt{1}, 2, 3), \qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

8. Encuentra el ángulo que forman las diagonales principales de un cubo.

9. Si $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 3)$ encuentra

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

10. Para cada uno de los siguientes pares de vectores calcula la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = (1, 3, 2), \quad \mathbf{u} = (2, -2, -1); \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

11. Dibuja y encuentra la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta
    a) Que pasa por los puntos $P = (1, -2, 1)$ y $Q = (2, 1, -1)$.
    b) Que pasa por el punto $P = (1, -2, 1)$ y es paralela al vector $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$.

12. Dibuja y encuentra la ecuación del plano que
    a) Pasa por los puntos $P = (1, -2, 1)$, $Q = (2, 1, -1)$ y $R = (-1, 2, 3)$.
    b) Pasa por el punto $P = (1, 2, 1)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$.

Unidad 2

Espacios vectoriales y subespacios

Objetivo

Aplicar las propiedades básicas de los *espacios vectoriales* para reconocer y dar ejemplos de espacios y subespacios.

Contenido

1. Axiomas de un espacio vectorial.
2. Ejemplos de espacios vectoriales.
3. Subespacios.
4. Ejemplos de subespacios.
5. Criterios para identificar subespacios.

Actividades

1. Estudia las Secciones 4.2 y 4.3 la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 3.

Tarea de la unidad 2

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Determina los axiomas de un espacio vectorial que satisface el conjunto dado con las operaciones indicadas. En caso negativo justifica tu respuesta.

   a) El conjunto de puntos del primer cuadrante del plano, con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación por un escalar.

   b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación por un escalar.

   c) El conjunto de matrices 2 por 2, con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

   d) El conjunto de matrices simétricas 3 por 3, con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

   e) El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 5, con las operaciones usuales de suma de polinomios y multiplicación por un escalar.

   f) El conjunto de matrices 3 por 3 cuyo determinante es igual a 0, con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

   g) El conjunto de polinomios de grado igual a 5, con las operaciones usuales de suma de polinomios y multiplicación por un escalar.

   h) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$ con las operaciones usuales de suma de vectores en el espacio y multiplicación por un escalar.

   i) El conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un escalar.

   j) El conjunto de funciones continuas no negativas en el intervalo $[0,1]$, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un escalar.

2. Dibuja el conjunto H y decide si es un subespacio del espacio vectorial V. En cada caso justifica tu respuesta.

   a) $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x,y) : xy = 0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^2$. $H = \{(x,y) : x + y = 0\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x,y) : xy \geq 0\}$.

   d) $V = \mathbb{R}^3$. $H = \{(x,y,z) : x - y + 2z = 0\}$.

   e) $V = \mathbb{R}^3$. $H = \{(x,y,z) : x + 2y + 3z = 6\}$.

3. Decide si el subconjunto H es un subespacio del espacio vectorial V. En cada caso justifica tu respuesta.

   a) $V = M_{33}$. $H = \{A \in M_{33} : \det A = 0\}$; det A es el determinante de A.

   b) $V = M_{33}$. $H = \{A \in M_{33} : \mathrm{tr} A = 0\}$; tr $A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ es la traza de A.

   c) $V = P_4$. $H = \{p \in P_4 : p(1) + p(\pi) = 0\}$.

   d) $V = P_7$. $H = \{p \in P_4 : p(1)p(\pi) = 0\}$.

   e) $V = C[0,1]$. $H = \{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)dx = 2f(0)\}$.

   f) $V = C[0,1]$. $H = \{f \in C[0,1] : \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0\}$.

   g) $V = C^1[0,1]$. $H = \{f \in C^1[0,1] : 2f'(x) - 3f(0) = 4f(1)\}$.

   h) $V = C^1[0,1]$. $H = \{f \in C^1[0,1] : 2f'(x) - (f(0))^2 = 0\}$.

Unidad 3

Independencia lineal y bases

Objetivo

Determinar el *espacio generado* de un conjunto dado de vectores y decidir si un conjunto dado de vectores es *linealmente independiente.* Decidir si un conjunto dado de vectores es una base de un espacio vectorial dado.

Contenido

1. Combinación lineal.
2. Espacio generado por un conjunto de vectores.
3. Interpretación geométrica del espacio generado.
4. Dependencia lineal.
5. Independencia lineal.
6. Base de un espacio vectorial.
7. Dimensión de un espacio vectorial.

Actividades

1. Estudia las Secciones 4.4, 4.5 y 4.6 de la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 4.

Tarea de la unidad 3

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Determina geométrica y algebraicamente si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.
   a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 1)\}$.
   b) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, -3), \mathbf{v}_2 = (-2, 3\sqrt{2})\}$.
   c) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)\}$.
   d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 1), \mathbf{v}_3 = (3, 1, 2)\}$.
2. Determina algebraicamente si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.
   a) En P_2, el conjunto $\{1 - x + x^2, 1 + x - x^2, 1 + 3x - 3x^2\}$.
   b) En P_3, el conjunto $\{3, 1 - x, 1 - x + x^2, 1 + x + x^3\}$.
   c) En M_{22}, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
   d) En M_{22}, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
3. Determina y dibuja el espacio generado por el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2)\}$.
4. Determina y dibuja el espacio generado por el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 1)\}$.
5. ¿Puede un conjunto de matrices simétricas generar M_{22}? Justifica.
6. ¿Puede un conjunto de matrices no inversibles generar M_{22}? Justifica.
7. Determine algebraicamente cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son li-nealmente independientes.
   a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 1)\}$.
   b) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, -3), \mathbf{v}_2 = (-2, 3\sqrt{2})\}$.
   c) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)\}$.
   d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 1), \mathbf{v}_3 = (3, 1, 2)\}$.
   e) En P_2, el conjunto $\{1 - x + x^2, 1 + x - x^2, 1 + 3x - 3x^2\}$.
   f) En M_{22}, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
8. Responde las siguientes preguntas y justifica tus respuestas:
   a) ¿Puede un conjunto de cuatro vectores ser linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$?
   b) ¿Puede un conjunto de cuatro polinomios ser linealmente independiente en P_3?
   c) ¿Puede ser l. i. un conjunto de vectores que contenga al 0?
9. ¿Para qué valores de α es $\{\mathbf{v}_1 = (\alpha, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, \alpha, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, \alpha)\}$ linealmente independiente?
10. Decide si los siguientes conjuntos dados de vectores forman una base del espacio vectorial dado.

a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1,2), \mathbf{v}_2 = (-2,1)\}$.

b) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2},-3), \mathbf{v}_2 = (-2,3\sqrt{2})\}$.

c) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (-1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,-1,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,-1)\}$.

d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (2,3,1), \mathbf{v}_3 = (3,1,2)\}$.

e) En P_2, el conjunto $\{1-x+x^2, 1+x-x^2, 1+3x-3x^2\}$.

f) En M_{22}, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

11. Encuentra una base del espacio vectorial dado.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\}$.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y+5z=0\}$.

c) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x-3y+5y-7w=0\}$.

d) $\{y \in C^2[0,1] : y''-4y=0\}$.

e) $\{y \in C^2[0,2\pi] : y''+y=0\}$.

12. Encuentra una base del espacio vectorial V que contenga al conjunto dado de vectores.

a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y+5z=0\}$; $\{\mathbf{v} = (1,1,-1)\}$.

b) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x-3y+5y-7w=0\}$; $\{\mathbf{v} = (0,-1,2,-1)\}$.

c) $\{y \in C^2[0,1] : y''-y=0\}$; $\{y = e^x + e^{-x}\}$.

13. Encuentra una base para el espacio solución del sistema homogéneo dado.

$$(a)\quad \begin{aligned} x+2y&=0 \\ 2x+4y&=0 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} 2x-y&=0 \\ 6x-3y&=0 \end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 2x+4y-3z&=0 \\ 3x+5y-z&=0 \end{aligned}$$

Unidad 4

Primer examen integrador

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 25 % de tu calificación final.*

2. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 5.

Unidad 5

Cambio de base y bases ortonormales

Objetivo

Determinar una base para el espacio nulo y para la imagen de una matriz dada. Determinar la matriz de transición de una base a otra de un espacio vectorial. Utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para ortogonalizar una base dada de $\mathbb{R}^n$.

Contenido

1. Espacio de renglones de una matriz.
2. Espacio de columnas de una matriz.
3. Espacio nulo y nulidad de una matriz.
4. Imagen y rango de una matriz.
5. Cambio de base. Matriz de transición.
6. Bases ortonormales.
7. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Actividades

1. Estudia las Secciones 4.7, 4.8 y 4.9 de la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 6.

Tarea de la unidad 5

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra el rango y la nulidad de la matriz dada.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ (d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentra una base para la imagen y el espacio nulo de las matrices del ejercicio 1.

3. Encuentra una base para el subespacio generado por los vectores dados.

   a) $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)\}$.

   b) $\{\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (-1 - 1, 4), \mathbf{v}_3 = (3, -3, 0), \mathbf{v}_4 = (3, -3, 0)\}$.

4. Encuentra los rangos de la matriz y de la matriz aumentada para decidir si el sistema dado de ecuaciones tiene solución.

$$(a)\ \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 3 \end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \qquad (c)\ \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 2 \end{aligned}$$

5. Escribe el vector dado en términos de la base dada.

   a) En $(2, 3)$ en términos de $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (1, -1)\}$.

   b) En (a, b, c) en términos de $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, -1, -1)\}$.

   c) En $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en términos de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

6. Si los ejes x y y del plano se rotan en sentido positivo un ángulo θ se obtienen nuevos ejes que denotamos con x' y y'. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas.

7. Aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base dada.

   a) $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (1, -1)\}$.

   b) $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, -1, -1)\}$.

   c) $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, -1, -1, -1)\}$.

8. Encuentra una base ortonormal de los subespacios dados.

   a) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)\}$.

   b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y = z\}$.

   c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3y = z - 3w\}$.

Unidad 6

Transformaciones lineales

Objetivo

Utilizar la definición de linealidad para decidir si una transformación dada es lineal y determinar su núcleo y su imagen.

Contenido

1. Transformaciones lineales.
2. Ejemplos de transformaciones lineales.
3. Núcleo de una transformación lineal.
4. Imagen de una transformación lineal.
5. Nulidad y rango de una transformación lineal.

Actividades

1. Estudia las Secciones 5.1 y 5.2 de la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 7.

Tarea de la unidad 6

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Determina si la transformación dada $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y descríbela geométricamente. Justifica tu respuesta.
   a) $T(x, y) = (3y, 3x)$.
   b) $T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y)$.
   c) $T(x, y) = (y, x)$.
   d) $T(x, y) = (-y, x)$.
   e) $T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, donde θ es un número real fijo.
2. Determina si la transformación dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y descríbela geométricamente. Justifica tu respuesta.
   a) $T\mathbf{u} = a\mathbf{u}$, donde a es un número real fijo.
   b) $T\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   c) $T\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   d) $T\mathbf{u} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. Para cada una de las transformaciones del ejercicio 2 calcula $T \circ T\mathbf{u}$
4. Determina si la transformación dada $T : P_n \to P_n$ es lineal. Justifica tu respuesta.
   En estos ejercicios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$
   a) $Tp(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.
   b) $Tp(x) =$ grado de $p(x)$.
   c) $Tp(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n$.
   d) $Tp(x) = \left(\int_0^1 p(x)dx\right)x^n$.
5. Determina si la transformación dada es lineal. Justifica tu respuesta.
   a) $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$; $TA = \operatorname{tr} A$.
   b) $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$; $TA = \det A$.
   c) $T : M_{nn} \to M_{nn}$; $TA = A^T$, donde A^T es la transpuesta de A.
   d) $T : M_{nn} \to M_{nn}$; $TA = A^2$.
   e) $T : M_{nn} \to M_{nn}$; $TA = (A^T + A)/2$.
6. Encuentra el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de T.
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y)$.
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (-y, x)$.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, 2y - x - z, 2z - y - x)$.

d) $T : P_n \to P_n$; $Tp(x) = p'(x)$

e) $T : M_{nn} \to \mathbb{R}$; $TA = \text{tr } A$.

f) $T : M_{nn} \to M_{nn}$; $TA = (A^T + A)/2$.

7. ¿Es posible que el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ sea el núcleo de una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

8. ¿Es posible que el conjunto $\{A \in M_{nn} : A = A^T\}$ sea la imagen de una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Unidad 7

Segundo examen integrador

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

Actividades

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Ten en cuenta que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 35 % de tu calificación final.*

2. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 8.

Unidad 8

Transformaciones lineales y matrices

Objetivo

Determinar una representación matricial de una transformación lineal dada así como sus valores y vectores característicos.

Contenido

1. Representación matricial de una transformación lineal.
2. Ejemplos.
3. Valores y vectores característicos.
4. Cálculo de valores y vectores característicos.
5. Espacio característico.
6. Multiplicidades algebraica y geométrica de los valores característicos.

Actividades

1. Estudia las Secciones 6.1 y 6.2 de la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 9.

Tarea de la unidad 8

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra la representación matricial de la transformación lineal dada así como su núcleo y su imagen.

   a) $T(x,y) = (ax - by, bx + ay)$, donde a y b son números reales fijos.

   b) $T_1(x,y,z) = (2x - y - z, 2y - x - z, 2z - y - x)$.

   c) $T_2(x,y,z) = (2x + y - z, 2y + x + z, 2z + y - x)$.

   d) $T = T_2 \circ T_1$, donde T_1 y T_2 están definidas en los dos incisos precedentes.

   e) $T(x,y,z,w) = (3x - y - z - w, 3y - x - z - w, 3z - x - y - w, 3w - x - y - z)$.

   f) $T(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$, donde θ es un número real fijo.

   g) $T\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   h) $T\mathbf{u} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   i) $T\mathbf{u} = 2\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} - \mathbf{u}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   j) $D : P_n \to P_n$; $Dp(x) = p'(x)$

   k) $T : P_n \to P_n$; $Tp(x) = D^2p(x)$, donde D es como en el inciso anterior.

   l) $T : M_{22} \to M_{22}$; $TA = (A^T + A)/2$.

2. Encuentra la matriz de la rotación R de $\mathbb{R}^3$ cuyo eje de rotación es el vector $(0,1,0)$.

3. Encuentra la matriz de la rotación R de $\mathbb{R}^3$ cuyo eje de rotación es el vector $(1,1,1)$.

4. Encuentra los valores y los espacios característicos de las matrices dadas.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (b)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ (c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ (d)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. ¿Es cierto que si A es una matriz inversible entonces todos sus valores característicos son no nulos? Justifica tu respuesta.

6. ¿Es cierto que si todos los valores característicos de una matriz A son no nulos, entonces A es inversible? Justifica tu respuesta.

Unidad 9

Diagonalización y formas cuadráticas

Objetivo

Utilizar la diagonalización de matrices simétricas para completar cuadrados, clasificar formas cuadráticas e identificar el tipo de cónica representado por una forma cuadrática dada.

Contenido

1. Matrices simétricas y diagonalización ortogonal.
2. Formas cuadráticas y secciones cónicas.
3. El teorema de los ejes principales en el plano y el espacio.

Actividades

1. Estudia las Secciones 6.4 y 6.5 de la Sexta edición del Grossman y resuelve ejercicios diversos. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 10.

Tarea de la unidad 9

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica A. Luego calcula $D = Q^T AQ$ y comprueba que D es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores característicos de A.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (b)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ (c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ (d)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Utiliza diagonalización para identificar la sección cónica que representa la ecuación cuadrática dada.

   a) $x^2 - (2xy/5) + y^2 = 6$
   b) $x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$
   c) $4x^2 + 4xy - y^2 - 7 = 0.$
   d) $x^2 - 3xy + 4y^2 = 1.$
   e) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2 = 1.$

Unidad 10

Evaluación global

"Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar."

Antonio Machado (1875–1939)

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

Contenido

Todos los temas del curso.

Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *No olvides que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 40 % de tu calificación final.*

2. Procura aprobar esta unidad a más tardar el día del examen global.