División de CBI

# Guía de

## cálculo diferencial e integral

CSAI81-13P vespertino

Por

*S. Arellano Balderas, J. Cruz Sampedro y J. Grabinsky Steider*

# Índice

# Información general

*“No hay genios en este mundo, todo es trabajo tenaz,*
*el uno por ciento es inspiración y el noventa y nueve transpiración.”*

Thomas Alva Edison (1847-1931)

## ¡Bienvenido al SAI!

Los profesores de los cursos de cálculo CSAI81 vespertino del *Sistema de Aprendizaje Individualizado* (SAI), te damos la más cordial bienvenida y te deseamos una placentera y exitosa experiencia en este sistema de aprendizaje. En estos cursos del SAI tenemos el compromiso de brindarte todo el apoyo que necesites para que aprendas cálculo en un ambiente cordial, responsable y respetuoso, en el que goces de plena libertad y confianza para interactuar activamente con nosotros: *dialogando, preguntando, argumentando, proponiendo soluciones y resolviendo tus dudas.*

## ¿Qué es el SAI?

El SAI es una modalidad de enseñanza fundada en la *continua interacción entre los alumnos y sus profesores.* En el SAI *no asistes a clases* pero dispones de *mucha asesoría individual,* así como de flexibilidad para *aprender a tu ritmo.* Por eso es *importantísimo* que te *presentes regularmente a asesoría* y te mantengas en constante contacto con tus profesores.

En CSAI81 queremos convencerte que
¡LA MATEMÁTICA NO ES UN JUEGO DE ESPECTADORES!

## ¿Qué no es el SAI?

- El SAI no es un sistema para *autodidactas,* ni de *enseñanza abierta* ni de *educación a distancia.*
- El SAI tampoco es un sistema de *cursos en línea* ni de *educación virtual.*
- El SAI no es una *reguladora* ni un sistema de *clases particulares.*

  *¡Cuidado,* aprender a tu ritmo no quiere decir estudiar a tu ritmo! Por eso,
- El SAI NO ES PARA QUE VENGAS CUANDO QUIERAS Y DEJES TODO PARA EL FINAL DEL TRIMESTRE.

## ¿Cómo se aprende cálculo en CSAI81?

En CSAI81 aprenderás los temas de Introducción al Cálculo realizando las actividades que se especifican en esta *guía,* con ASESORÍA y APOYO PERMANENTE de los profesores. La guía te indica paso a paso qué materiales debes estudiar y qué ejercicios debes resolver para cubrir *todos los temas del curso.* Los profesores supervisarán tus avances y te brindarán *toda la asesoría que necesites* para resolver tus dudas hasta que te sientas listo para *presentar tus exámenes.*

Nuestro **método de enseñanza** se funda esencialmente en:

1. *La abundante asesoría individual,* para que resuelvas tus dudas, profundices en los temas, fortalezcas tu independencia y prepares tus exámenes.

2. *La evaluación presencial de tareas y exámenes:* en CSAI81 todas tus tareas y exámenes se califican en tu presencia para que inmediata y oportunamente resuelvas tus dudas, afirmes tus aciertos y detectes y corrijas tus errores.

3. *Las numerosas oportunidades para aprobar los exámenes:* EN LUGAR DE REPROBARTE EN LOS EXÁMENES, en CSAI81 te resolvemos tus dudas, te asignamos tareas para que repases y te damos oportunidad de presentar nuevamente los exámenes, *hasta que los apruebes.*

4. *La flexibilidad para que aprendas y progreses a tu propio ritmo:* en CSAI81 puedes terminar un curso y empezar con el siguiente o puedes reanudar el curso en donde te quedaste y completarlo en dos trimestres:

   ESTUDIAR CÁLCULO EN CSAI81 PUEDE SER LENTO, ¡PERO ES SEGURO!

Una de nuestras metas fundamentales es que desarrolles tu *autodisciplina*, *seguridad* e *independencia* para alcanzar tus metas académicas y profesionales.

## ¿Qué tengo que hacer?

- Descargar e imprimir esta guía.
- Leer cuidadosamente la información del curso para el trimestre 13I y familiarizarte con los *horarios de atención* y los *criterios de evaluación.*
- Conseguir el libro de texto y estudiarlo de acuerdo al plan trazado en la guía.
- *¡Asistir al SAI a asesoría cada vez que tengas dudas!*

  La atención a los alumnos de cálculo CSAI81 se da en el Aula E204, de 15:00 a 18:00 horas, todos los días hábiles del trimestre.
- Entregar la tarea de la primera unidad correctamente resuelta.
- Presentar tu examen y continuar trabajando bajo la constante supervisión de los profesores.

# Guía y libro de texto

*"Sin entusiasmo nunca se logró nada grandioso"*

Emerson (1803-1882)

El éxito en el estudio de las matemáticas requiere de *entusiasmo, dedicación y organización. El entusiasmo y la dedicación son tu responsabilidad* pero una buena organización requiere de una *guía,* un *libro de texto* y supervisión, orientación y apoyo por parte de tus profesores.

El propósito de esta guía es proveerte un plan de trabajo para que estudies organizadamente y asimiles en un trimestre los contenidos de al menos uno de los tres cursos de cálculo.

El **libro de texto** es:

CÁLCULO UNA VARIABLE, de G. B. Thomas, Pearson; 2010, decimosegunda edición.

Para que tu aprendizaje progrese de manera ordenada y sistemática, así como para facilitar la supervisión de tus avances, cada curso se ha dividido en *diez unidades.* Cada unidad establece su *contenido,* sus *objetivos* y las *actividades* que debes realizar para preparar los correspondientes exámenes. En cada unidad se detallan los *indicadores de evaluación*, es decir, los temas y habilidades relevantes en las evaluaciones de la unidad. Presta especial atención a esos indicadores porque te sugieren el *tipo de problemas y preguntas que encontrarás en los exámenes.*

**¡Imprime la guía y adquiere el libro de texto!** Es muy importante que dispongas de estos materiales durante todo el trimestre porque –sumados a tu dedicación y al apoyo de tus instructores– serán los principales soportes de tu aprendizaje de cálculo en CSAI81.

# Introducción al Cálculo

*"Il libro della natura é scritto in lingua matematica."*

Galileo Galilei (1564-1642)

"El gran libro de la naturaleza permanece siempre abierto ante nuestros ojos y en sus páginas se encuentra la verdadera filosofía ... Pero no nos es posible leerlo a menos que conozcamos los caracteres y el lenguaje en el que está escrito ... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas."

Galileo Galilei (1564-1642)

# Unidad 1

# Números reales y ecuaciones

## Objetivo

Aplicar las propiedades básicas de la *suma* y el *producto* de números reales para *realizar operaciones* y para *resolver ecuaciones* e interpretar gráficamente sus soluciones.

## Contenido

1. Operaciones con los números reales.
2. Representación de los números reales.
3. Simplificación y racionalización de cocientes.
4. Solución de ecuaciones.
5. El método de completar cuadrados.
6. Rectas circunferencias y parábolas

## Indicadores de evaluación

1. Realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números reales.
2. Distinguir a los números racionales de los irracionales por su representación decimal y expresar los racionales como cocientes de enteros.
3. Usar factorización para simplificar fracciones algebraicas.
4. Usar racionalización para simplificar fracciones algebraicas.
5. Encontrar la ecuación de una recta, dados dos de sus puntos o dada su pendiente y uno de sus puntos.
6. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.
7. Usar factorización para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas.
8. Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
9. Usar el método de completar cuadrados para resolver ecuaciones cuadráticas y para esbozar las gráficas de parábolas y circunferencias.
10. Encontrar los puntos de intersección de dos parábolas, así como los de una recta y una parábola.

## Actividades

1. Esta unidad es esencialmente de repaso. Te conviene estudiar los apéndices A.1 y A.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resolver ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 1.

## Tarea de la unidad 1

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{5}{7} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{7}\right)\frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{8}\right) \div \left(\frac{3}{5}\right)}, \qquad \frac{\sqrt{8}}{6\sqrt{5}} - \frac{2}{3\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}.$$

2. Determina cuáles de los siguientes números son racionales y en caso afirmativo exprésalos como cocientes de números enteros:

$$2.345\overline{67}, \qquad \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}, \qquad 1.23456789101112\cdots.$$

3. Simplifica

$$\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}, \qquad \frac{x^2-x-2}{3+2x-x^2}.$$

4. Simplifica

$$\frac{x^2+x-12}{x+\sqrt{12-x}}, \qquad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{x-1}.$$

5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por:

   *a*) $(-2, 1)$ y $(3, -2)$.

   *b*) $(6, -1)$ y es perpendicular a $5x - 2y = 10$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a) } \frac{1}{3}x - \frac{4}{5} = \frac{5}{7} + \frac{3}{2}x, \quad \text{(b) } \begin{aligned} 3x - y &= y - 1, \\ x - y &= 6x - 8. \end{aligned}$$

7. Usa factorización para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y cúbicas:

$$x^2 + x - 12 = 0, \qquad 2x^3 + 13x^2 + 6x = 0, \qquad x^3 + 27 = 0.$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas (a) completando cuadrados y (b) por la fórmula general:
$$x^2 + x - 1 = 0, \qquad 2x^2 = 5x + 1.$$

9. Completa cuadrados para dibujar las siguientes curvas:
$$y = x^2 + x - 12, \qquad x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

10. Dibuja los siguientes pares de curvas y encuentra sus puntos de intersección:
$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} y &= x^2 - 2x, \\ y + x^2 &= 6x - 8, \end{aligned} \qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= x + y \\ x + y &= 1/2. \end{aligned}$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Apéndice A.3: 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 24, 25, 26, 37, 38, 39, 40, 43, 44, y 51.

# Unidad 2

# Desigualdades

## Objetivo

Aplicar las propiedades básicas de *orden* y *valor absoluto* de los números reales para *resolver desigualdades* e interpretar gráficamente sus soluciones.

## Contenido

1. Notación de conjuntos.
2. Intervalos.
3. Resolución de desigualdades.
4. El valor absoluto de los números reales.
5. Interior y exterior de una circunferencia.

## Indicadores de evaluación

1. Resolver desigualdades y expresar sus soluciones en términos de intervalos.
2. Resolver desigualdades lineales.
3. Usar factorización para resolver desigualdades.
4. Resolver desigualdades racionales (cocientes de lineales).
5. Resolver desigualdades lineales dobles.
6. Resolver ecuaciones sencillas dadas en términos de valores absolutos.
7. Resolver desigualdades sencillas dadas en términos de valores absolutos.
8. Usar el método de completar cuadrados para resolver desigualdades cuadráticas.
9. Usar propiedades del valor absoluto para resolver desigualdades cuadráticas.

## Actividades

1. Estudia los apéndices A.1 y A.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 2.

## Tarea de la unidad 2

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

En todos los casos, expresa las soluciones de las siguientes desigualdades en términos de intervalos.

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

   (a) $-3x - 12 \geq 0,$ (b) $2x + \frac{3}{2} \geq \frac{4}{5} - \frac{3}{4}x.$

2. Usa factorización para resolver las siguientes desigualdades:

   (a) $(x+1)(3x-2) < 0,$ (b) $x^3 - 4x < 0.$

3. Resuelve las siguientes desigualdades:

   (a) $x^2 - 2 \leq 2x + 1,$ (b) $2x^2 - 3x - 10 \geq x^2 - 2x + 20.$

4. Resuelve las siguientes desigualdades racionales:

   (a) $\dfrac{3x-4}{2+7x} < 0,$ (b) $\dfrac{x-4}{2+3x} \leq -3.$

5. Resuelve las siguientes desigualdades lineales dobles:

   (a) $2x + 2 > -3x + 1 \geq x - 3,$ (b) $2x + \frac{3}{2} \geq \frac{2}{5} - \frac{3}{4}x > \frac{2x}{3} - 1.$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   (a) $|3x - 7| = 2,$ (b) $|x^2 - 3x| = 5,$ (c) $\left|1 + \frac{2}{x}\right| = x.$

7. Resuelve las siguientes desigualdades:

   (a) $4 - |x - 2| \geq 0,$ (b) $|2x + 3| \geq 3.$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

   (a) $|5x - 3| < 5,$ (b) $|10 - 5x| \geq 2.$

9. Completa cuadrados y usa valores absolutos para resolver las desigualdades:

$$\text{(a)} \quad x^2 - 2x \geq 7, \qquad\qquad \text{(b)} \quad x - 3x^2 \leq 1/36.$$

10. Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{4} \leq (x-2)^2, \qquad\qquad \text{(b)} \quad x^2 + 2x \leq 3.$$

11. Identifica y sombrea los puntos $(x, y)$ del plano que satisfacen $y \leq 8x - x^2$. Determina las coordenadas del punto más alto que sombreaste.

12. Identifica y sombrea los puntos $(x, y)$ del plano que satisfacen $x^2 + y^2 + x - 2y \leq 0$.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Apéndice A.1: 3-23.
- Apéndice A.3: 31, 32, 33, 34, 35, y 36.

# Unidad 3

# Funciones y sus gráficas

## Objetivo

Determinar el *dominio*, el *rango* y los *ceros* de una función y esbozar su *gráfica*. Utilizar funciones para formular y analizar problemas en contextos reales.

## Contenido

1. Funciones: dominio, rango, ceros e intervalos de positividad.
2. Gráfica de una función.
3. Tipos de funciones:
   - Polinomiales, racionales, radicales.
   - Pares, impares, crecientes, decrecientes y periódicas.
   - Funciones definidas por partes.
4. Suma, resta, producto, división y composición de funciones.
5. Traslaciones, reflexiones y cambios de escala de funciones.
6. Funciones como modelos matemáticos de situaciones reales.

## Indicadores de evaluación

1. Dada una función, elaborar una tabla de valores, encontrar sus ceros y sus intervalos de positividad y utilizar esta información para bosquejar su gráfica.
2. Decidir si una curva en el plano representa la gráfica de una función.
3. Determinar gráfica y algebraicamente el dominio y el rango de una función.
4. Realizar la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones y determinar el dominio de la función resultante.
5. Expresar una función dada como una composición de funciones.
6. Identificar y dar ejemplos de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, potencias, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y definidas por partes.
7. Dada la gráfica de una función, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.

8. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.

9. Dada la gráfica de una función, obtener una fórmula que represente la función.

10. Utilizar las funciones para modelar situaciones en contextos reales.

## Actividades

1. Estudia las secciones 1.1 y 1.2 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad 3antes de finalizar la semana 3.

## Tarea de la unidad 3

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra los ceros de las siguientes funciones y esboza las gráficas correspondientes a partir de una tabla de valores en 20 puntos bien distribuidos en su dominio:

$$\text{(a) } f(x) = 9x - x^3, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x-2}{3+2x}.$$

2. Utiliza la prueba de la recta vertical para decidir, en cada uno de los siguientes casos, si la curva dada en el plano es la gráfica de una función de $x$: (a) Una recta; (b) Una circunferencia; (c) Una parábola; (d) Una elipse; (d) Una hipérbola. *Sugerencia: Analiza con cuidado todos los casos posibles.*

3. Esboza la gráfica de las siguientes funciones y determina su dominio y su rango:

$$\text{(a)} \quad y = 1 - 3x - x^2, \qquad \text{(b)} \quad y = \begin{cases} 2 - x, & \text{si} \quad -5 \le x < -1, \\ 2|x| - 1, & \text{si} \quad |x| \le 1, \\ 3 - x^2, & \text{si} \quad 1 < x \le 3. \end{cases}$$

4. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \sqrt{\frac{4x-3}{2x+7}}, \qquad \text{(b) } y = \frac{x+3}{1-|2x-3|}.$$

5. Si $f(x) = \sqrt{2-x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-9}{\sqrt{16-x^2}}$, encuentra $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y $(g \circ f)(x)$; así como los respectivos dominios de $f$, $g$, $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ y $g \circ f$.

6. Encuentra el dominio de las siguientes funciones y expresa cada una de ellas como una composición de dos funciones:

$$\text{(a) } y = \sqrt{4x^2 - 9}, \qquad \text{(b) } y = \sqrt{1 + x - x^2} + \frac{1}{x^2 - x - 4}.$$

7. Dada la función $f(x) = |x|$, calcula $y = f(x) + 2$, $y = f(x - 2)$ y $y = 3 - 2f(x + 1)$. Esboza las gráficas correspondientes a partir de la gráfica de $f(x) = |x|$.

8. Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ determina su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utiliza esta información para esbozar su gráfica.

9. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ determina su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utiliza esta información para esbozar su gráfica.

10. La gráfica de la función $y = f(x)$ consiste de la línea quebrada que une los puntos $A = (-2, 3)$, $B = (2, 7)$ y $C = (5, 4)$, en el orden que aparecen. Encuentra una fórmula para esta función.

11. Un vaso cónico de papel tiene 10 $\text{cm}^3$ de volumen. Expresa la cantidad de papel utilizada para construir ese vaso en términos del radio $r$ de su base.

# Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 1.1: 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 37, 40, 42, 45, 49, 51, 52, 54, 58, 60, 62, 63, 70, 71 y 72.

- Sección 1.2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 28, 31, 34, 37,40, 43, 46, 49, 52, 55, 57, 60, 63, 67, 70, 73, 76 y 85.

# Unidad 4

# Primer examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas con una y dos incógnitas e interpretar gráficamente sus soluciones.

2. Resolver desigualdades lineales, cuadráticas y cocientes de lineales y expresar las soluciones en notación de intervalos.

3. Resolver desigualdades sencillas dadas en términos de valores absolutos y expresar sus soluciones en términos de intervalos.

4. Determinar el dominio y rango de una función.

5. Realizar la suma, resta, producto, cociente y composición de funciones y determinar su dominio.

6. Expresar una función dada como una composición de funciones.

7. Dada la gráfica de una función, obtener una fórmula que represente la función.

8. Dada la gráfica de una función, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.

9. Utilizar las funciones para modelar situaciones en contextos reales.

10. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO HAYAS ENTENDIDO BIEN EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 25 % de tu calificación final.*

2. Para que aprecies y valores la importancia y trascendencia del cálculo diferencial e integral en el desarrollo de la ciencia, la tecnología y la cultura humana, en cada examen integrador te pediremos que investigues y escribas un breve ensayo sobre la vida y obra de alguno de los más prominentes hombres de ciencia, que contribuyeron a la creación y desarrollo de esta rama fundamental de la matemática.

   Para presentar tu primer examen integrador debes entregar un ensayo en el que expliques en qué consiste el método científico, por qué es importante en la ciencia y la tecnología y cuál fue el papel de Galileo Galilei (1564-1642) en el desarrollo de ese método. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *No olvides que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 4.

4. **Si reciclas dos veces tu primer examen integrador, para presentarlo por tercera vez es indispensable que entregues la siguiente tarea correctamente resuelta.**

## Tarea de la unidad 4

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Simplifica

   (a) $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 5x - 3}$, (b) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 2}{x - 7}$.

2. Completa cuadrados para dibujar las siguientes curvas:

   (a) $y = x^2 - x - 1$, (b) $x^2 + y^2 - x - y = 1$.

3. Dibuja los siguientes pares de curvas y encuentra sus puntos de intersección:

   (a) $\begin{aligned} y + x^2 &= 4x, \\ y - x &= 2, \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x + 3y \\ x + 3y &= 1/2. \end{aligned}$

4. Resuelve las siguientes desigualdades:

   (a) $x^2 - 5 \leq 2x + 3$, (b) $\dfrac{3x - 4}{2 + 5x} \geq 1$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   (a) $|x^2 + x| = 7$, (b) $\left|1 - \dfrac{5}{x}\right| = 3x$.

6. Resuelve las siguientes desigualdades:

$$\text{(a)}\ \ 9-|3x-2|\geq 1, \qquad\qquad \text{(b)}\ \ |5x+3|\geq 3x.$$

7. Encuentra los ceros de las siguientes funciones y esboza las gráficas correspondientes a partir de una tabla de valores en 20 puntos bien distribuidos en su dominio:

$$\text{(a) } f(x)=\sqrt{4x-x^2}, \qquad\qquad \text{(b) } f(x)=\frac{2x-3}{4+x}.$$

8. Esboza la gráfica de las siguientes funciones y determina su dominio y su rango:

$$\text{(a)}\quad y=1+x-3x^2, \qquad\qquad \text{(b)}\quad y=\begin{cases} 2-|x|, & \text{si} \quad -5\leq x<-1,\\ 1-2x, & \text{si} \quad |x|\leq 1,\\ 5-x^2, & \text{si} \quad 1<x\leq 3.\end{cases}$$

9. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y=\sqrt{\frac{2-5x}{x+7}}, \qquad\qquad \text{(b) } y=\frac{x+3}{\sqrt{1-|x-3|}}.$$

10. Si $f(x)=\sqrt{2-3x}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}$, encuentra $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y $(g\circ f)(x)$; así como los respectivos dominios de $f$, $g$, $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ y $g\circ f$.

11. Dada la función $f(x)=x/(2-x)$ determina su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utiliza esta información para esbozar su gráfica.

12. Dada la función $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ determina su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utiliza esta información para esbozar su gráfica.

13. Se desea minimizar un cartel rectangular cuya área de impresión es de 160 $\text{cm}^2$, con márgenes superior e inferior de 7 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno. Encuentra una fórmula que exprese la cantidad necesaria de papel en términos del ancho $x$ del cartel.

# Unidad 5

# Funciones trigonométricas

## Objetivo

Determinar el dominio, el rango y los ceros de funciones trigonométricas y esbozar sus gráficas. Utilizar funciones trigonométricas para formular y analizar problemas en contextos reales.

## Contenido

1. Medida de ángulos en radianes.
2. Triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras.
3. Las seis funciones trigonométricas básicas a partir de un triángulo rectángulo.
4. Las seis funciones trigonométricas básicas a partir del círculo trigonométrico.
5. Gráficas de funciones trigonométricas: amplitud, periodo, frecuencia, rango y ceros.
6. Interpretación gráfica de traslaciones, reflexiones y cambios de escala en funciones trigonométricas.
7. Identidades trigonométricas.
8. Funciones trigonométricas como modelos matemáticos de situaciones reales.

## Indicadores de evaluación

1. Transformar grados en radianes y viceversa.
2. Obtener valores de las funciones trigonométricas básicas por medio de triángulos.
3. Evaluar las funciones trigonométricas básicas a partir del círculo trigonométrico.
4. Bosquejar la gráfica de una función trigonométrica a partir de una tabla de valores.
5. Dada una función trigonométrica sencilla, encontrar sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad y esbozar la gráfica.
6. Dada la gráfica de una función trigonométrica básica, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.
7. Obtener los intervalos de positividad de funciones trigonométricas sencillas.
8. Utilizar las identidades básicas para simplificar expresiones trigonométricas.
9. Utilizar las funciones trigonométricas para modelar situaciones en contextos reales.

## Actividades

1. Estudia la sección 1.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 5.

## Tarea de la unidad 5

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Transforma en radianes las medidas de los ángulos dados en grados y viceversa.

   (a) $\theta = 30°$, (b) $A = \dfrac{\pi}{5}$ rad, (c) $B = 75°$, (d) $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.

2. Utilizando triángulos e identidades trigonométricas adecuadas, calcula los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos de 30 y 105 grados.

3. Utilizando el círculo trigonométrico e identidades trigonométricas adecuadas, calcula los valores exactos de los ángulos de $\pi$ y $\pi/8$ radianes.

4. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones, a partir de una tabla 20 valores calculados en puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 2\pi]$:

   (a) $y = \cos(2\theta)$, (b) $y = 2 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ (c) $y = \cos(\theta - \dfrac{\pi}{4})$.

5. Esboza las gráficas de las siguientes funciones, determinando sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad:

   (a) $y = 2 - 2\cos(3\theta)$, (b) $y = 3 + \mathrm{sen}(\theta/2)$.

6. Esboza las gráficas de las siguientes funciones, realizando traslaciones, reflexiones y cambios de escala en la gráfica de $y = \cos\theta$:

   (a) $y = 5\cos(\theta - \dfrac{\pi}{4})$, (b) $y = 3 - 2\cos(2\theta - \dfrac{\pi}{4})$.

7. Determina los intervalos en los que las siguientes funciones son positivas:

   (a) $y = \mathrm{sen}\,3x$, (b) $y = -\cos(x/2)$.

8. Determina el dominio de las siguientes funciones

   (a) $y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}(2x)}$, (b) $y = \sqrt{\cos x}$.

9. Verifica la siguiente identidades trigonométrica:

$$\mathrm{sen}\,u + \mathrm{sen}\,v = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

10. Los lados de un triángulo miden 5, 12 y 13 m respectivamente. ¿Cuánto mide el mayor de sus ángulos?

11. Juan se encuentra en un punto $A$ de la orilla de un lago circular de 1 km de radio. Para ir al punto $B$, opuesto a $A$ en el otro lado del lago, Juan camina 1 km sobre la ribera hasta un punto $C$ y desde allí se traslada en un bote en línea recta de $C$ a $B$. Determine la distancia recorrida por Juan.

12. Dada la función $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, encontrar sus ceros, su periodo, su frecuencia y su paridad. Utiliza esta información así como una tabla 10 valores calculados en puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, \pi]$ para esbozar la gráfica de $f$.

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 1.3: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 25, 26, 27, 31, 34, 36, 41, 44, 46, 47, 50, 53, 54, 61, 62, 64, 65, 66, y 68.

# Unidad 6

# Límites de funciones

## Objetivo

Determinar gráficamente, estimar numéricamente y calcular analíticamente el *límite finito* de una función en un punto dado.

## Contenido

1. Determinación gráfica del límite de una función en un punto.
2. Estimación numérica del límite de una función en un punto.
3. Cálculo de límites de funciones utilizando leyes de los límites.
4. Cálculo de límites de funciones eliminando denominadores nulos por factorización o racionalización.
5. Cálculo de límites de funciones trigonométricas utilizando identidades y límites conocidos.
6. Cálculo de límites de funciones utilizando el teorema del sandwich.
7. Determinación gráfica de los límites laterales de una función en un punto.
8. Estimación numérica de los límites laterales de una función en un punto.
9. Cálculo algebraico de límites laterales.
10. Criterio para la existencia del límite de una función en un punto en términos de sus límites laterales.

## Indicadores de evaluación

1. Determinar gráficamente el límite de una función en un punto dado.
2. Proveer aproximaciones de un punto dado y estimar numéricamente el límite de una función en ese punto.
3. Utilizar las leyes de los límites para calcular límites de funciones.
4. Eliminar denominadores nulos por factorización o racionalización para calcular límites de funciones.
5. Utilizar límites conocidos e identidades para calcular límites de funciones trigonométricas.
6. Utilizar el teorema del sandwich para calcular límites de funciones.

7. Determinar gráficamente los límites laterales de una función en un punto dado.

8. Proveer aproximaciones por la derecha y por la izquierda de un punto dado y estimar numéricamente el límite de una función en ese punto.

9. Determinar algebraicamente los límites laterales de una función en un punto dado.

10. Usar límites laterales para determinar la existencia del límite finito de una función en un punto.

# Actividades

1. Estudia las secciones 2.1, 2.2 y 2.4 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 6.

# Tarea de la unidad 6

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Esboza la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si} \quad x < -1, \\ 2|x| - 1, & \text{si} \quad -1 \leq x < 2, \\ 3 - (x-2)^2, & \text{si} \quad 2 < x, \end{cases}$$

y determina:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2. En cada caso, propón diez números diferentes muy cercanos a $x_0$ y utiliza tu calculadora para evaluar $f(x)$ en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2}$.

3. Utiliza las leyes de los límites para calcular:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 1}{2x - 5}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^3(5\theta^2)}{\sqrt{4 - \operatorname{sen} \theta}}$.

4. Elimina los denominadores nulos por factorización y calcula:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$, (b) $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{1 + x - 2x^2}$.

5. Elimina los denominadores nulos por racionalización y calcula:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{3-\sqrt{x^2+8}}.$$

6. Utiliza límites de la forma $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ para evaluar:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{2x}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{t\to 0}\frac{4t}{\tan \pi t}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{t\operatorname{sen}(2t)}.$$

7. Usa el teorema del sandwich para calcular:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

*Sugerencia.* Para (a) recuerda que $|\operatorname{sen}\theta|\leq 1$. En (b) usa $\theta\cos^2\theta\leq\operatorname{sen}\theta\leq\theta$.

8. Esboza la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2, & \text{si} \quad x<0,\\ 1-x, & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1,\\ 1-2x+x^2, & \text{si} \quad 1<x,\end{cases}$$

y determina:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0^-} f(x), \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to 1} f(x).$$

9. Considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 2a-x, & \text{si} \quad x<0,\\ \dfrac{\operatorname{sen}(bx)}{x}, & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1,\\ x(a^2+\operatorname{sen}b)-4x^2, & \text{si} \quad 1<x,\end{cases}$$

Determina los valores de $a$ y $b$ para que existan los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1} f(x).$$

10. Calcula los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{\tan(\sqrt{1-x})}.$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 2.1: 2, 5, 7, 10, 13, 16 y 21.
- Sección 2.2: 3, 4, 5, 6 12, 15, 18, 21, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 43, 46, 50, 52, 54, 67, 70 y 73.
- Sección 2.4: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 14, 17, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40 y 42.

# Unidad 7

# Segundo examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Obtener gráficamente el límite de una función en un punto dado.
2. Estimar numéricamente el límite de una función en un punto dado.
3. Utilizar las leyes de los límites para calcular límites de funciones.
4. Eliminar denominadores nulos por factorización o racionalización para calcular límites de funciones.
5. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.
6. Dada una función trigonométrica sencilla, encontrar sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad y esbozar gráfica.
7. Utilizar las identidades básicas para simplificar expresiones trigonométricas.
8. Utilizar funciones para modelar situaciones en contextos reales.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Ten en cuenta que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 35 % de tu calificación final.*

2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo en el enuncies las leyes de Kepler y expliques por qué son importantes las funciones trigonométricas en la formulación de la primera de esas leyes. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 7.

4. **Si reciclas dos veces tu segundo examen integrador, para presentarlo por tercera vez debes entregar la siguiente tarea correctamente resuelta.**

# Tarea de la unidad 7

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Esboza las gráficas de las siguientes funciones, determinando sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad:

$$\text{(a)}\quad y = 1 - 2\cos(2\theta), \qquad \text{(b)}\quad y = 3 - 3\operatorname{sen}(\theta/2).$$

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta/2)}, \qquad \text{(b) } y = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}.$$

3. Si $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-16}{\sqrt{2-x^2}}$, encuentra $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y $(g \circ f)(x)$; así como los respectivos dominios de $f$, $g$, $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ y $g \circ f$.

4. Verifica las siguientes identidades trigonométricas

$$\tan^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{1+\cos(2u)}, \qquad 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v).$$

5. Elimina los denominadores nulos por factorización y calcula:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^3-1}, \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 2} \frac{2x^2+3x-2}{3x^2+8x+4}.$$

6. Elimina los denominadores nulos por racionalización y calcula:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-4}, \qquad \text{(b) } \lim_{x\to -1} \frac{3-\sqrt{10+x}}{1-\sqrt{2+x}}.$$

7. Utiliza límites de la forma $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ para evaluar:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}, \qquad \text{(b) } \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{\tan \pi t}.$$

8. Usa el teorema del sandwich para calcular:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{10}{x^2}\right), \qquad \text{(b) } \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\theta}\right).$$

9. Esboza la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si} \quad x < 0, \\ 3 - 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x + x^2, & \text{si} \quad 1 < x, \end{cases}$$

y determina:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x)$, (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$, (d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

10. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3a - x, & \text{si} \quad x < 0, \\ b - 3x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 5b - 2ax + x^2, & \text{si} \quad 1 < x, \end{cases}$$

Determina los valores de $a$ y $b$ para que existan los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

Esboza la gráfica de la función resultante.

11. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, encontrar sus ceros, su periodo, su frecuencia y su paridad. Utiliza esta información así como una tabla 20 valores calculados en puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 2\pi]$ para esbozar la gráfica de $f$.

# Unidad 8

# Funciones continuas

## Objetivo

Dada una función, determinar sus intervalos de *continuidad*; clasificar sus puntos de *discontinuidad*, obtener sus *asíntotas horizontales* y *verticales* y esbozar su gráfica.

## Contenido

1. Definición de función continua en un punto.
2. Continuidad de la suma, producto, cociente y la composición de funciones.
3. Intervalos de continuidad de una función.
4. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
5. El teorema del valor intermedio.
6. Determinación gráfica y estimación numérica del límite al infinito de una función.
7. Cálculo de límites al infinito y asíntotas horizontales.
8. Determinación gráfica y estimación numérica de los límites infinitos de una función en un punto.
9. Gráficas de las funciones tangente y secante.
10. Esbozo de la gráfica de una función racional.

## Indicadores de evaluación

1. Determinar gráfica y algebraicamente si una función es continua en un punto dado.
2. Encontrar los intervalos de continuidad de una función, gráficamente y usando las propiedades de las funciones continuas.
3. Determinar los valores de las constantes de una función seccionada para que sea continua.
4. Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de una función.
5. Utilizar el teorema del valor intermedio para garantizar la existencia de solución de una ecuación en un intervalo de longitud dada.
6. Determinar gráfica, numérica y analíticamente los límites al infinito de una función racional.

7. Determinar gráfica, numérica y analíticamente los límites infinitos de una función racional en un punto dado y encontrar las ecuaciones de las asíntotas verticales.
8. Proponer funciones racionales que tengan discontinuidades removibles (o evitables) y asíntotas horizontales y verticales especificadas de antemano.
9. Dada una función racional, determinar su dominio, sus raíces, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales, sus intervalos de continuidad, sus puntos de discontinuidad y bosquejar su gráfica.
10. Bosquejar las gráficas de las funciones tangente y secante.

## Actividades

1. Estudia las secciones 2.5 y 2.6 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 8.

## Tarea de la unidad 8

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Bosqueja la gráfica de
$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & \text{si} \quad x < 0, \\ 2 - 3x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x^2, & \text{si} \quad 1 < x, \end{cases}$$
y determina en que puntos es continua esta función.
2. Utiliza las propiedades de las funciones continuas (para sumas, productos, cocientes y composiciones) para determinar los intervalos de continuidad de las siguientes funciones.
$$\text{(a)} \quad y = 3x - \frac{x}{x-3}, \qquad \text{(b)} \quad y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x - 6}, \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{\sqrt{3x+1}}{\operatorname{sen}(4x+1)}.$$
3. Determina los valores de $a$ y $b$ para que las siguientes funciones sean continuas:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a + 1, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a - x, & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} b^2x^2 - bx - 1, & \text{si} \quad x \leq 1, \\ 1 - b^2x, & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$
4. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:
$$\text{(a)} \quad y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \qquad \text{(b)} \quad y = \frac{x^2 - 4}{1 - |x - 1|}.$$

5. Encuentra un intervalo de longitud $1/10$ que contenga una raíz de cada una de las siguientes ecuaciones:
$$\text{(a)}\quad x^3+2x-2=0, \qquad\qquad \text{(b)}\quad 5x+\cos x = 2x-4.$$
6. En cada caso, propón diez números diferentes muy grandes (positivos o negativos, según el caso) y utiliza tu calculadora para calcular $f(x)$ en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar:
$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-16}{4-2x^2}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x\operatorname{sen}x+x^{5/3}}{x^2-4x+1}.$$
7. En cada caso, propón veinte números diferentes muy cercanos a $x_0$ y utiliza tu calculadora para calcular $f(x)$ en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar:
$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^2}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x\operatorname{sen}x+x^{5/3}}{x^2-4x+3}.$$
8. Sugiere una función $f(x)$ que tenga una discontinuidad evitable en $x=1/2$ y una esencial en $x=-3$ pero que sea continua en los demás valores de $x$.
9. Calcula los siguientes límites al infinito:
$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^5-x^3+16}{4x-x^4-2x^5}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x\operatorname{sen}x+x^{7/5}}{\sqrt[5]{x^7-8x+10}}.$$
10. Considera la función $y=\dfrac{x^2-25}{(2x-5)(x+5)}$ y determina:
    - Su dominio.
    - Sus ceros.
    - Sus intervalos de positividad.
    - Sus intervalos de continuidad.
    - El tipo de sus discontinuidades.
    - Su rango.
    - Las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

    Utiliza esta información para esbozar su gráfica.
11. Considera la función $y=\tan(x/2)$ y determina:
    - Su dominio.
    - Sus ceros.
    - Sus intervalos de positividad.
    - Sus intervalos de continuidad.
    - El tipo de sus discontinuidades.
    - Su rango.
    - Las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

    Utiliza esta información para esbozar su gráfica.

# Ejercicios complementarios

Si te hace falta práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 2,5: 1, 4, 5, 6, 13, 17, 20, 24, 27, 30, 31, 38, 41, 44, 46, 57, 58, 69, 71, 73, 76.
- Sección 2.6: 1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 22, 23, 26, 29, 32, 35, 37, 40, 41, 43, 46, 49, 53, 54, 56, 59, 62, 80, 81 y 82.

# Unidad 9

# Funciones derivables

## Objetivo

Usar la definición y las reglas básicas de derivación para calcular la derivada de una función. Obtener la recta tangente a la gráfica de una función en uno de sus puntos y la aproximación lineal estándar a una función en un punto dado; así como la velocidad instantánea de un objeto en movimiento y la tasa de cambio instantánea de una función en un instante dado.

## Contenido

1. Cálculo de la derivada de una función en un punto a partir de la definición.
2. Definición de recta tangente.
3. Definición de velocidad instantánea.
4. Definición de aproximación lineal estándar.
5. Reglas de derivación: potencias, sumas, productos y cocientes.
6. Derivadas de orden superior.
7. Continuidad y derivabilidad (diferenciabilidad).
8. Intervalos de derivabilidad.
9. La derivada como razón de cambio en contextos concretos.

## Indicadores de evaluación

1. Calcular la derivada de una función en un punto dado a partir de la definición.
2. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
3. Decidir si una función es derivable en un punto dado e identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.
4. Explicar gráfica y analíticamente la inexistencia de la derivada de una función en un punto dado.
5. Calcular derivadas de primer orden y de orden superior usando las reglas de derivación para potencias, sumas, productos y cocientes.
6. Analizar el movimiento rectilíneo de una partícula, determinando su velocidad y aceleración en cada instante a partir de su ecuación de movimiento.

7. Interpretar la derivada como una razón de cambio en contextos concretos.

8. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

9. Explicar gráficamente por qué una función puede ser continua en todos los puntos de su dominio pero no necesariamente derivable en algunos de ellos.

## Actividades

1. Estudia las secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.9 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 9.

## Tarea de la unidad 9

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones a partir de la definición:

$$\text{(a)}\quad y = x^2 - 1, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt{1-x}, \qquad \text{(c)}\quad y = \cos\theta.$$

2. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos dados:

$$\text{(a)}\quad y = x^2 - 1, \quad (2,3); \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt{x}, \quad (4,2); \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{3x+1}{x}, \quad (1,4).$$

3. Usa las reglas de derivación(para sumas, productos y cocientes) para determinar los intervalos de derivabilidad de las siguientes funciones y calcula sus derivadas:

$$\text{(a)}\quad y = 5x^3 - x^{1/3}, \quad \text{(b)}\quad y = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right), \quad \text{(c)}\quad y = \frac{(t+1)(t-2)}{(t-1)(t+2)}.$$

4. Explica gráfica y analíticamente por qué la función $f(x) = 3 + |3x - 6|$ no es derivable en $x = 2$ pero sí lo es en los demás valores de $x$. Calcula $f'(x)$ para $x \neq 2$.

5. Utiliza reglas de derivación para calcular la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = x - \tan x, \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{t+1}{t-1}, \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

6. La posición de un móvil en el tiempo $t$ está dada por $s = 12t - t^3$, tomando $t$ en segundos y $s$ en metros. En cada caso determina:

   *a*) La velocidad y la aceleración de ese cuerpo para $t = 2$.

*b*) Los instantes en que cambia de dirección el movimiento del cuerpo.

*c*) Los instantes y velocidades del cuerpo cuando pasa por $s = 0$.

7. Expresa gráficamente y en lenguaje de derivadas los siguientes enunciados y sugiere funciones que modelen estas situaciones:

   *a*) El precio del petróleo se ha mantenido estable.

   *b*) El precio del petróleo está subiendo.

   *c*) El precio del petróleo dejo de bajar.

8. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra la aproximación lineal estándar en los puntos dados:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, en $a = 25$; (b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, en $a = 16$; (c) $f(x) = \sec x$, en $a = 0$.

   Usando estas aproximaciones y sin usar tu calculadora encuentra un valor aproximado de $\sqrt{26}$, $\sqrt[4]{15.5}$ y $\sec(0.2)$.

9. Se desea construir una tubería de hierro cuya longitud es de 2.5 km y cuyo radio interior es de 15 cm. Si se requiere que el radio exterior de esa tubería sea de 15.5 cm, utiliza una aproximación lineal para estimar la cantidad de hierro que se necesita para su construcción. Luego, calcula el volumen exacto del hierro requerido y calcula el error de la aproximación.

10. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$, que sea continua para toda $x \in \mathbb{R}$ pero que no sea derivable en $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 10$.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.1: 2, 3, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 22, 24, 27, 29, , 39, 42 y 45.
- Sección 3.2: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 23, 26, 27, 30, , 31, 34, 36 y 53.
- Sección 3.3: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 39, 40, 41, 43, 45, 48, 65 y 66.
- Sección 3.4: 2, 4, 7, 8, 9, 14, 20 y 26.
- Sección 3.9. 1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15, 42, 43 y 44.

# Unidad 10

# Evaluación global

*"Caminante, no hay camino,*
*se hace camino al andar."*

Antonio Machado (1875–1939)

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

## Contenido

Todos los temas del curso.

## Indicadores de evaluación

1. Resolver desigualdades lineales, cuadráticas y cocientes de lineales y expresar las soluciones en notación de intervalos.
2. Realizar la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones y determinar sus correspondientes dominios.
3. Dada una función trigonométrica, determinar su amplitud, periodo, frecuencia, rango, ceros e intervalos de positividad y usar esta información para esbozar su gráfica.
4. Estimar y calcular el límite de una función en un punto y encontrar sus asíntotas horizontales y verticales.
5. Determinar gráfica y analíticamente los intervalos de continuidad de una función y clasificar sus discontinuidades.
6. Utilizar el teorema del valor intermedio para garantizar la existencia de soluciones de una ecuación en un intervalo de longitud dada.
7. Dada una función racional, determinar su dominio, sus raíces, sus intervalos de continuidad, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales, sus puntos de discontinuidad y usar esta información para esbozar su gráfica.
8. Utilizar funciones para modelar situaciones en contextos reales.
9. Usar la definición de derivada para calcular la derivada una función en un punto dado.
10. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.

11. Determinar la velocidad y aceleración instantáneas de una partícula que se mueve en línea recta, a partir de su ecuación de movimiento.

12. Usar las reglas básicas de derivación de *sumas, productos, cocientes y potencias* para calcular derivadas.

13. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO HAYAS ENTENDIDO BIEN EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *No olvides que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 40 % de tu calificación final.*

2. Entrega la tarea de la unidad 10, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Entrega un ensayo en el que enuncies las leyes del movimiento de Newton y expliques porqué son importantes las derivadas en la formulación matemática de las dos primeras. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

4. Procura aprobar esta unidad antes del último día de exámenes.

## Tarea de la unidad 10

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Esboza la gráfica de las siguientes funciones y determina su dominio y su rango:

$$\text{(a)}\quad y = 3x^2 - 2x - 1, \qquad\qquad \text{(b)}\quad y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{si} \quad -4 \le x < -1, \\ |4x-5| + 1, & \text{si} \quad |x| \le 1, \\ 3x - x^2, & \text{si} \quad 1 < x \le 4. \end{cases}$$

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \sqrt{\frac{3x-5}{7x+8}}, \qquad\qquad \text{(b) } y = \frac{3x+1}{\sqrt{1 - |2x+5|}}.$$

3. Si $f(x) = \sqrt{3x-8}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-16}{\sqrt{36-x^2}}$, encuentra $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y $(g \circ f)(x)$; así como los respectivos dominios de $f$, $g$, $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ y $g \circ f$.

4. Verifica las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right), \qquad 4\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}\theta.$$

5. Determina la amplitud, los ceros, la frecuencia, el periodo y el rango de cada una de las siguientes funciones:

$$y = 3 - 3\operatorname{sen}(2x - \pi), \qquad y = 2 - 4\operatorname{sen}\theta.$$

   Utiliza esta información para esbozar las gráficas correspondientes.

6. Juan se encuentra en un punto $A$ de la orilla de un lago circular de 2 km de radio. Para ir al punto $B$ diametralmente opuesto de la orilla del lago, Juan camina una distancia $\theta$ sobre la ribera hasta un punto $C$ y desde allí se traslada en un bote en línea recta de $C$ a $B$. Determine en términos de $\theta$ la distancia que Juan recorrió.

7. Encuentra un intervalo de longitud menor que $1/10$ que contenga una solución de la ecuación $x + \operatorname{sen}(x/3) = \pi$.

8. Determina el dominio, los ceros, el rango, los intervalos de continuidad y las asíntotas horizontales y verticales de

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 8x + 4}.$$

   Usa esta información para esbozar la gráfica de esta función.

9. Utiliza la definición de derivada para calcular $y'$ en cada uno de los siguientes casos:

$$y = \sqrt{3x+2}, \qquad y = \sqrt[3]{1-2x}, \qquad y = \cos(3x)$$

10. Encuentra la recta tangente a la gráfica de $y = 1/(x-2)$ en el punto $(3, 1)$. Esboza la gráfica de la función y de la tangente en el punto dado.

# Cálculo Diferencial

*"Il libro della natura é scritto in lingua matematica."*

Galileo Galilei (1564-1642)

"El gran libro de la naturaleza permanece siempre abierto ante nuestros ojos y en sus páginas se encuentra la verdadera filosofía ... Pero no nos es posible leerlo a menos que conozcamos los caracteres y el lenguaje en el que está escrito ... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas."

Galileo Galilei (1564-1642)

"A esa lista de caracteres, hoy en día le agregaríamos las derivadas y las integrales."

Peter Lax (1926-)

# Unidad 11

# Reglas de derivación

## Objetivo

Aplicar las *reglas de derivación* de potencias, sumas, productos, cocientes y de funciones trigonométricas en el cálculo de derivadas.

## Contenido

1. Reglas de derivación: potencias, sumas, productos y cocientes.
2. Derivadas de orden superior.
3. Derivadas de funciones trigonométricas.
4. Aplicación de derivadas para estudiar situaciones en contextos reales.

## Indicadores de evaluación

1. Usar las reglas de derivación de potencias, sumas, productos y cocientes para calcular derivadas de primer orden.
2. Calcular derivadas de funciones trigonométricas.
3. Calcular derivadas de orden superior.
4. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
5. Identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.
6. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración en cada instante.

## Actividades

1. Estudia las secciones 3.3 y 3.5 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar poco a poco el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 1.

# Tarea de la unidad 1

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque*
*aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza*
*hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = 2x^5 - x^2 + 1, \qquad \text{(b)}\quad y = 7x^{-5/3} - 2\sqrt[5]{x}, \qquad \text{(c)}\quad y = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^{2/3}}.$$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones usando reglas de derivación:

$$\text{(a)}\quad y = \sqrt[5]{x}\,(x^3 - 5\sqrt[3]{x}), \quad \text{(b)}\quad y = x^{2/3}\operatorname{sen} x, \quad \text{(c)}\quad y = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right).$$

3. Calcula la primera y la segunda derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = x^3 - x^2, \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{t+1}{t-1}, \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

4. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

$$\text{(a) } y = 2x - x^2, \quad (1, 1); \qquad\qquad \text{(b) } y = \sqrt{x}, \quad (4, 2).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

5. Calcula la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = \cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt{x}\tan x; \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}.$$

6. Calcula la primera, la segunda y la tercera derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1, \qquad \text{(b)}\quad y = x^2\operatorname{sen} x; \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}.$$

7. Utiliza las reglas de derivación para decidir, sin calcular las derivadas, en qué intervalos son derivables las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y = \frac{5}{x} - \sqrt{4 - x}, \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{9 - x^2}; \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{\sqrt{\cos t}}{\operatorname{sen} t}.$$

8. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

$$y = 4\operatorname{sen} x, \quad (\pi/4, 2\sqrt{2}); \qquad\qquad y = 3\tan x, \quad (\pi/4, 3).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

9. Esboza la gráfica de $y = \cos x \operatorname{sen} x$ y determina gráfica y analíticamente los puntos en los que la tangente a la gráfica es horizontal.

10. Si la posición de una partícula en el eje $y$ está dada por $y = 5\operatorname{sen} t\cos t$, encuentra:
    - Su posición, velocidad y aceleración en los instantes $t = 0$, $t = \pi/4$ y $t = \pi$.
    - Los instantes en los que la velocidad vale cero.
    - Los instantes en los que la aceleración es nula.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.3: 1, 4, 7,..., 28, 29, 32, 33, 36, 39, 40, 43, 45 y 46.
- Sección 3.5: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 47, 48, 53 y 54.

# Unidad 12

# La regla de la cadena y derivadas implícitas

## Objetivo

Usar la *regla de la cadena* para calcular derivadas de funciones explícitas e implícitas.

## Contenido

1. La regla de la cadena.
2. Diferenciación de funciones implícitas.

## Indicadores de evaluación

1. Usar la regla de la cadena para calcular derivadas.
2. Calcular derivadas de funciones implícitas.
3. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto dado de una curva definida implícitamente.

## Actividades

1. Estudia las secciones 3.6 y 3.7 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 2.

# Tarea de la unidad 2

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque*
*aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza*
*hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Usa la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = (1 + 2x - x^3)^7, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt[5]{r^2 - \sqrt{r}}.$$

2. Emplea la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)^4, \qquad \text{(b)}\quad y = \cos\left(t^2 + \frac{2}{t}\right).$$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = 3x^2\sqrt[4]{2 - x^3}, \qquad \text{(b)}\quad y = \pi x \operatorname{sen}(3x^2).$$

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = (1-\theta^2)^3\sqrt{2\theta^3+1}, \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{5\operatorname{sen}\theta^2}{1+\cos\sqrt{\theta}}.$$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = \left(\frac{1-\sqrt{\theta}}{\operatorname{sen}(\theta^2)}\right)^2, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt[3]{\theta + \operatorname{sen}^2(\sqrt{\theta})}.$$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$y = \pi\operatorname{sen}^2(\sec(5t^3)) - 4\tan^2\left(\cos\left(\sqrt[3]{5t^2+1}\right)\right).$$

7. Utiliza derivación implícita para calcular $y'$ si
$$\text{(a)}\quad x^3 + y^2 = 2xy, \qquad \text{(b)}\quad \sqrt{x+y} = xy.$$

8. Utiliza derivación implícita para calcular $y'$ si
$$\text{(a)}\quad x^{2/3} + y^{2/3} = \cos(xy), \qquad \text{(b)}\quad xy^2 = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}.$$

9. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos dados:
$$\text{(a) } y^4 = y^2 - x^2,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right); \qquad \text{(b) } y^2(2-x) = x^3,\ (1,1).$$

10. La posición $y(t)$ de una partícula está dada implícitamente por $t^2(t-y)^2 = t^2 - y^2$. Encuentra su velocidad en $t = 1$ si se sabe que $y(1) = 1$.

# Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.6: 1, 4, 7,..., 76.
- Sección 3.7: 2, 5, 8, 11,..., 44.

# Unidad 13

# Tasas relacionadas, linealización y valores extremos

## Objetivo

Aplicar la derivada para resolver problemas de *tasas relacionadas*, *aproximaciones lineales* y *valores extremos.*

## Contenido

1. Problemas de tasas relacionadas.
2. Linealización y diferenciales.
3. Puntos críticos y valores extremos locales y absolutos de una función.

## Indicadores de evaluación

1. Usar la derivada para resolver problemas de tasas relacionadas.
2. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.
3. Usar la aproximación lineal estándar para estimar funciones en contextos reales.
4. Utilizar la notación de Leibniz para calcular derivadas.
5. Utilizar la aproximación diferencial para estimar el cambio de una función derivable alrededor de un punto dado.
6. Determinar gráficamente los valores máximo y mínimo locales (relativos) de una función.
7. Determinar gráficamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo.
8. Determinar los puntos críticos de una función.
9. Determinar gráfica y analíticamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo cerrado finito dado.

# Actividades

1. Estudia las secciones 3.8, 3.9 y 4.1 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar poco a poco el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 3.

# Tarea de la unidad 3

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Dos personas parten del mismo punto, una hacia el oeste a 30 km/hr y la otra hacia el sur a 20 km/hr. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ambas después de 3 minutos?

2. Una niña vuela un cometa a 80 m de altura. Si el viento aleja horizontalmente el cometa a 10 m/seg, ¿qué tan rápido debe soltar la cuerda cuando el cometa se encuentra a 100 m de ella?

3. Determina la linealización de $f(x)$ en los puntos dados.

   $$\text{(a) } f(x) = x^2 - x, \quad a = 2; \qquad \text{(b) } f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \frac{\pi}{3}.$$

   Enseguida, esboza las gráficas de estas funciones con sus correspondientes linealizaciones en los puntos dados.

4. Utiliza aproximaciones lineales para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

   $$\text{(a)} \quad \sqrt{17}; \qquad \text{(b)} \quad (28)^{2/3}; \qquad \text{(c)} \quad \tan(70^\circ).$$

   ¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

5. Si el diámetro de un árbol era de 50 cm y durante el año siguiente su circunferencia aumentó 5 cm. Calcula el incremento exacto del área de su sección transversal; luego estima ese incremento utilizando una aproximación lineal y compara tus resultados.

6. Utiliza la notación de Leibniz para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   $$\text{(a)} \quad y = x(1+x)^{1/2}; \qquad \text{(b)} \quad y = x \operatorname{sen} 5x; \qquad \text{(c)} \quad y = \tan(x - \sqrt{x}).$$

7. Utiliza linealización para estimar el cambio en el área $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2+4}$ de un cono circular recto de radio $r$ y altura 2, cuando el radio pasa de 2 a $2 + \Delta r$.

8. Encuentra los puntos críticos y determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones:

   $$\text{(a) } y = \frac{x}{x^2+1}; \qquad \text{(b) } y = \cos 3x. \qquad \text{(b) } y = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}.$$

   Usa esta información para esbozar las gráficas.

9. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones e indica los puntos en donde se alcanzan:

   $$y = x^2 - 3x + 1,\ -2 \leq x \leq 7; \quad y = x - 2\cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi; \quad y = (x-2)^{2/3},\ -2 \leq x \leq 5.$$

   Usa esta información para esbozar las gráficas.

10. La altura de un cuerpo que se mueve verticalmente está dada por $h = -5t^2 + 4t + 3$, con $h$ en metros y $t$ en segundos. Encuentra la altura máxima de ese cuerpo.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.8: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 y 32.
- Sección 3.9: 1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 23, 26, 29 y 32.
- Sección 4.1: 3, 6, ..., 63.

# Unidad 14

# Primer examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Aplicar las reglas básicas de derivación: *potencias, sumas, productos, cocientes, funciones trigonométricas, regla de la cadena y funciones implícitas,* para calcular derivadas de primer orden y de orden superior.

2. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.

3. Identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.

4. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración instantáneas.

5. Usar la derivada para resolver problemas de tasas relacionadas.

6. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

7. Utilizar la notación de Leibniz para calcular derivadas.

8. Estimar el cambio de una función derivable alrededor de un punto dado, utilizando la aproximación diferencial.

9. Determinar los puntos críticos de una función.

10. Determinar gráfica y analíticamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo cerrado finito dado.

# Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 25 % de tu calificación final.*

2. Para presentar tu primer examen integrador debes entregar un ensayo en el que enuncies las leyes del movimiento de Newton y expliques porqué son importantes las derivadas en la formulación matemática de las dos primeras. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *No olvides que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 4.

4. **Si reciclas dos veces tu primer examen integrador, para presentarlo por tercera vez es indispensable que entregues la siguiente tarea correctamente resuelta.**

# Tarea de la unidad 4

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Mientras Jorge camina por un sendero recto a 2 m/seg lo enfoca un reflector que se encuentra en el piso, a 10 m del sendero. ¿Con qué rapidez gira el reflector 5 segundos después de que Jorge pasó por el punto más cercano al reflector?

2. Calcula la primera y la segunda derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $y = (x^3 - 5x^2 + 3x - 1)^2$, (b) $y = x^2 \operatorname{sen}^2 x$; (c) $y = \dfrac{\tan\theta^2}{\sec\theta^2 - 1}$.

3. Esboza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ y determina gráfica y analíticamente los puntos en los que la tangente a la gráfica es horizontal.

4. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

   $$y = \sqrt{3x^2 + 1}, \quad (1, 2); \qquad y = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}, \quad (0, 1/2).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

5. Si la posición de una partícula en el eje $y$ está dada por $y = \operatorname{sen} t + \cos t$, encuentra:
   - Su posición, velocidad y aceleración en los instantes $t = 0$, $t = \pi/4$ y $t = \pi$.
   - Los instantes en los que la velocidad vale cero.
   - Los instantes en los que la aceleración es nula.

6. Utiliza derivación implícita para calcular $y'$ si

   (a) $x^3 + xy^2 = y/x$, (b) $\sqrt{x - y} = x^2 y$.

7. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos dados:

   (a) $y^3 + xy^2 - x^2y = 1,\ (1,1);$ (b) $\operatorname{sen} y + x\cos y = 3y,\ (0,0).$

8. La posición $y(t)$ de una partícula está dada implícitamente por $2 + (t-y)^2 = t^2 - y^2$. Encuentra su velocidad en $t = 2$ si se sabe que $y(2) = 1$.

9. Utiliza aproximaciones lineales para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

   (a) $\sqrt{66}$; (b) $(9)^{2/3}$.

   ¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

10. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones e indica los puntos en donde se alcanzan:

$$y = x^4 - 2x^3,\ -2 \le x \le 7; \quad y = \sqrt{3}x + 2\operatorname{sen} x \ \ -4 \le x \le 3.$$

   Usa esta información para esbozar las gráficas.

# Unidad 15

# Monotonía, concavidad y trazado de gráficas

## Objetivo

Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

## Contenido

1. El teorema del valor medio.
2. Funciones crecientes y funciones decrecientes.
3. Criterio de la primera derivada para extremos locales.
4. Puntos de inflexión.
5. Concavidad y trazado de gráficas.
6. Criterio de la segunda derivada para extremos locales.

## Indicadores de evaluación

1. Usar el teorema del valor medio para argumentar porqué la diferencia de dos funciones que tienen la misma derivada en un intervalo debe ser una constante.
2. Utilizar el teorema del valor medio para acotar el número de ceros de una función monótona.
3. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la primera derivada para clasificarlos.
4. Determinar los intervalos de monotonía de una función, mediante el signo de su primera derivada.
5. Determinar los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función en un intervalo dado.
6. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.
7. Determinar los puntos de inflexión de una función mediante el cambio de signo de la segunda derivada.

8. Determinar los intervalos de concavidad de una función, mediante el signo de su segunda derivada.

9. Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de positividad, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad, sus asíntotas horizontales y verticales y usar esta información para esbozar su gráfica.

## Actividades

1. Estudia las secciones 4.2, 4.3 y 4.4 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 5.

## Tarea de la unidad 5

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque*
*aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza*
*hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Usa derivadas para verificar que, dos a dos, las siguientes funciones difieren únicamente por una constante:

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, (b) $g(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$, (c) $h(x) = -\cos^2 x$.

2. Determina el número de raíces que tiene cada una de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados:

   (a) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0, \quad -2 \leq x \leq 2$; (b) $x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) = 8, \quad x \in \mathbb{R}$.

3. Determina la posición $s(t)$ de un cuerpo que se desplaza en línea recta, cuya velocidad $v = ds/dt$ y posición inicial $s(0)$ están dadas como sigue:

   (a) $v = 3t + 1,\ s(0) = 1$; (b) $v = 4t - 5\operatorname{sen}(2t),\ s(0) = 3$.

4. Encuentra los intervalos de monotonía y determina y clasifica los puntos críticos de $f$ si:

   (a) $f'(x) = x(x-2)$; (b) $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$; (c) $f'(x) = x^2 - 2x + 1$.

5. Encuentra los puntos críticos de las siguientes funciones y usa el criterio de la primera derivada (o el de la segunda derivada) para clasificarlos:

   (a) $f(x) = x^3 - 4x$; (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$.

6. Encuentra el valor mínimo de la función

   $$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

   en el intervalo $(0, \infty)$.

7. Encuentra los intervalos de concavidad y determina los puntos de inflexión de $f$ si:

   (a) $f''(x) = x(x-2)$; (b) $f''(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$; (c) $f''(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

8. Determina el dominio, el rango, los intervalos de monotonía, los puntos críticos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^2$; (b) $f(x) = \dfrac{4x}{4x^2+1}$.

   Utiliza esta información para esbozar las gráficas.

9. Encuentra los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = x^4$; (b) $f(x) = x|x|$; (c) $f(x) = 2 - (x-2)^{1/3}$.

10. Dada la función $y = x^2\sqrt{1-x^2}$:

    *a*) Encuentra su dominio.
    *b*) Determina su paridad.
    *c*) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
    *d*) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
    *e*) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
    *f*) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
    *g*) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 4.2: 2, 5, 8, 11, 14, 19, 21, 23, 26, 31, 34, 38, 41, 44, 50 y 52.
- Sección 4.3: 3, 6, 9,..., 51.
- Sección 4.4: 2, 5, 8,..., 83.

# Unidad 16

# Optimización aplicada

## Objetivo

Utilizar derivadas para *resolver problemas aplicados de máximos y mínimos.*

## Contenido

1. Problemas de optimización aplicada.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar la derivada para resolver problemas de optimización.

## Actividades

1. Estudia la sección 4.5 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 6.

## Tarea de la unidad 6

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra la mínima distancia del punto $(-2, 1)$ a la recta $x + y = 2$.

2. Se tienen 100 m de cerca para construir un corral rectangular con tres divisiones paralelas a uno de sus lados. ¿Cuánto debe valer el largo y el ancho del corral para que su área sea máxima?

3. Determina las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica, con tapa, de 1 $\text{dm}^3$ de volumen, que utilice la menor cantidad de aluminio para su construcción.

4. Se desea minimizar un cartel rectangular cuya área de impresión es de 300 $\text{cm}^2$, con márgenes superior e inferior de 10 cm y márgenes laterales de 6 cm cada uno. Encuentra las dimensiones que debe tener el cartel que use la menor cantidad de papel.

5. Encuentra las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de 1 m de radio.

6. Encuentra las dimensiones del cono de menor volumen que circunscribe a un cilindro de radio 5 y altura 9. Se supone que las bases del cono y del cilindro son coplanares y tienen el mismo centro.

7. Se quiere diseñar un recipiente cilíndrico con tapa de 1 litro de volumen. Si el $\text{m}^3$ de material para la tapa y la base cuesta el doble que el de los lados, ¿cuáles son el radio y la altura del recipiente más económico?

8. Se desea construir un cometa pegando las bases de dos triángulos isósceles, cada uno de base $2x$. Si los lados restantes del primer triángulo deben medir 30 cm y los del segundo de 40, ¿cuánto debe valer $x$ para que el área del cometa sea máxima.

9. Se quiere diseñar una caja rectangular de base cuadrada de 1 $\text{m}^3$ de volumen. Si el $\text{m}^2$ de material para la tapa vale 20 pesos, el de la base 50 y el de los lados 30, determina las dimensiones de la caja más económica.

10. Juan se encuentra en un punto $A$ de la orilla de un lago circular de 1 km de radio y desea ir al punto $B$, opuesto a $A$ en el otro lado del lago. Si Juan dispone de un bote que navega a 3 km/h y camina a razón de 4 km/h. Determina el tiempo que Juan debe caminar para llegar a $B$ en el menor tiempo posible.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 4.5: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 20 y 22.

# Unidad 17

# Segundo examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar el teorema del valor medio para acotar el número de ceros de una función monótona.
2. Usar el teorema del valor medio para argumentar porqué la diferencia de dos funciones que tienen la misma derivada en un intervalo debe ser una constante.
3. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la primera derivada para clasificarlos.
4. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.
5. Determinar los intervalos de monotonía de una función, mediante el signo de su primera derivada.
6. Determinar los intervalos de concavidad de una función, mediante el signo de su segunda derivada.
7. Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo finito dado.
8. Determinar los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función en un intervalo dado.
9. Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de positividad, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad, sus asíntotas horizontales y verticales y usar esta información para esbozar su gráfica.
10. Aplicar la derivada para resolver problemas de optimización.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO HAYAS ENTENDIDO BIEN EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Ten en cuenta que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 35 % de tu calificación final.*

2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo acerca del método de Pierre Fermat (1601-1665) para localizar los máximos y mínimos locales de una función. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 7.

4. **Si reciclas dos veces tu segundo examen integrador, para presentarlo por tercera vez debes entregar la siguiente tarea correctamente resuelta.**

## Tarea de la unidad 7

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentre todas las rectas que son tangentes simultáneamente a las parábolas
$$y = -x^2 \qquad \text{y} \qquad y = x^2 + 1.$$

2. En un despeje de portería, una pelota sale disparada con una velocidad inicial $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$. ¿Qué relación debe haber entre $v_0$ y $v_1$ para que el área debajo de la parábola seguida por la pelota sea la mayor posible? *Nota.* El área debajo del arco de la parábola es 2/3 del área del rectángulo que la circunscribe.

3. Determina los máximos y mínimos locales, los intervalos de monotonía, los puntos de inflexión, los intervalos de concavidad y esboza la gráfica de $y = f(x)$ si se sabe que $f(0) = 2$ y
$$y' = -(x-2)(x+3).$$

4. Calcula $y'$ para cada una de las siguientes funciones:
$$\text{(a) } y = \sqrt[4]{x^2 + x\cos^2 x}, \qquad \text{(b) } y = \frac{x^2 - \tan(3x)}{\sqrt{x^2 - 2x}}, \qquad \text{(b) } \operatorname{sen}(x/y) + \cos(y/x) = yx.$$

5. Determina el dominio, el rango, los intervalos de monotonía, los puntos críticos, los máximos y mínimos locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
$$\text{(a) } f(x) = x^4 - 4x^3; \qquad \text{(b) } f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$
Utiliza esta información para esbozar las gráficas.

6. Dada la función $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$:

*a*) Encuentra su dominio.

*b*) Determina su paridad.

*c*) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.

*d*) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.

*e*) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.

*f*) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.

*g*) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

7. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de $y = \cos\theta + \dfrac{\theta}{2}$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

8. Determine el punto de la parábola $y = (x-1)^2$ que está más cerca del origen.

9. Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematada en su parte superior por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 4 m, encuentre las dimensiones de la ventana de mayor área.

10. La esquina superior izquierda de una hoja de papel rectangular, de 20 cm de ancho por 30 de largo, se dobla hasta hacerla llegar al borde derecho de la hoja formando un pentágono (no necesariamente regular). ¿Cómo debe doblarse la hoja para que el pentágono así formado tenga área máxima?

# Unidad 18

# Funciones logarítmicas y exponenciales

## Objetivo

Usar los métodos del cálculo diferencial para obtener y analizar las gráficas de las funciones *exponencial* y *logaritmo natural*.

## Contenido

1. Funciones inversas y sus derivadas.
2. Logaritmos naturales.
3. Derivadas logarítmicas.
4. La función exponencial.

## Indicadores de evaluación

1. Esbozar la gráfica de una función invertible a partir de la gráfica de su inversa.
2. Decidir gráfica y algebraicamente si una función es inyectiva y encontrar su inversa.
3. Determinar gráfica y algebraicamente el dominio y el rango de una función y de su inversa.
4. Obtener la derivada de una función invertible a partir de la derivada de su inversa.
5. Definir las funciones logaritmo natural y exponencial y establecer sus propiedades fundamentales.
6. Calcular derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.
7. Utilizar las propiedades básicas de las funciones exponenciales y logarítmicas para simplificar expresiones o resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
8. Utilizar el método de diferenciación logarítmica para calcular derivadas.
9. Dada una función exponencial o logarítmica, determinar su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

# Actividades

1. Estudia las secciones 7.1, 7.2 y 7.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 8.

# Tarea de la unidad 8

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, esboza las gráficas de las correspondientes funciones inversas:

   (a) $f(x) = 2 - x^2$, $x \geq 0$; (b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $x \leq 1$.

2. Decide si las siguientes funciones son inyectivas y en caso afirmativo encuentra su inversa:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 2$; (b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

3. Determina gráfica y algebraicamente los dominios y rangos de las siguientes funciones y los de sus correspondientes inversas:

   (a) $f(x) = \sqrt{2-x}$, $x \leq 2$; (b) $f(x) = 4x - x^2$, $x \leq 2$.

4. Si $f(x) = x^3 + 5x + 1$, encuentra $\left(f^{-1}\right)'(-5)$. Nota que $f(-1) = -5$.

5. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar:

   (a) $\ln(8/2^5)$; (b) $3^{\log_3 5}$; (c) $\ln(2^{2/5}\sqrt{2})$.

6. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $y = x^2 \ln x$; (b) $y = x^3 e^x + \ln(e^x \ln x)$; (c) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^{-x}}$.

7. Encuentra $y'$ y $y''$ para cada una de las siguientes funciones:

   (a) $y = e^{-x^2}$; (b) $y = x^3 e^{\operatorname{sen} x}$; (c) $y = e^{x \ln x} \cos(\ln x)$.

8. Simplifica las siguientes expresiones:

   $\ln(y^3) - 2\ln y$; $\ln(x^x e^{2\ln x})$; $e^{\ln(x+1)^2 - 2\ln x}$.

9. Utiliza diferenciación logarítmica para derivar las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^5; \qquad \text{(b) } y = \sqrt{\frac{x\ln(x+1)e^{(x+2)}}{x^2+1}}; \qquad \text{(c) } y = x^x e^{x\cos x}.$$

10. Encuentra $y'$ para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = x^{-x^2}; \qquad \text{(b) } y = x^{\operatorname{sen} x}; \qquad \text{(c) } y = (\ln x)^{\ln x}.$$

11. Para cada una de las funciones

$$\text{(a)} \quad y = x^2 e^{-2x}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad y = x\ln(x^2),$$

determina su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usa esa información para esbozar su gráfica.

12. Resuelve para $x$ en las siguientes ecuaciones:

$$\ln(x+1) + \ln x = 4; \qquad 2x\ln x + x = 0; \qquad y = e^x - e^{-x}.$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.1: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 31, 32 50, 53 y 54.
- Sección 7.2: 1, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 55, 59, 63 y 67.
- Sección 7.3: 1, 3, 5, 9, 11, 13, 19, 53, 57, 61, 71, 82, 111, 114 y 115.

# Unidad 19

# Trigonométricas inversas. Regla de L'Hôpital y polinomios de Taylor

## Objetivo

Obtener y analizar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas, calcular límites de formas indeterminadas y aplicar el concepto de aproximación de una función mediante polinomios de Taylor.

## Contenido

1. Funciones trigonométricas inversas.
2. Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.
3. El Teorema de Taylor.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar triángulos o el círculo trigonométrico para calcular valores importantes de las funciones trigonométricas inversas.
2. Calcular derivadas de funciones trigonométricas inversas.
3. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para simplificar expresiones que involucren este tipo de funciones.
4. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
5. Esbozar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.
6. Utilizar la regla de L'Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
7. Encontrar e interpretar gráficamente la aproximación de los polinomios de Taylor de grados uno y dos (aproximación lineal y cuadrática) de una función en un punto dado.
8. Encontrar el polinomio de Taylor de grado $n$ de una función en un punto dado.
9. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

# Actividades

1. Estudia la secciones 7.5, 7.6 y la parte de polinomios de Taylor de la Sección 10.8 de la Decimosegunda edición del Thomas y el material sobre polinomios de Taylor que se te entregará en el SAI. Resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 9.

# Tarea de la unidad 9

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Por medio de un triángulo calcula:

$$\text{(a)}\ \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \qquad \text{(b)}\ \tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right).$$

2. Encuentra $y'$ en cada una de las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a)}\ y = \arccos(x^2) - 5\ln(\operatorname{sen}^{-1} x); \qquad \text{(b)}\ y = 2x^3 \ln(\arctan x^2);$$

3. Simplifica

$$\text{(a)}\ \operatorname{sen}(\arctan(x/2)); \qquad \text{(b)}\ \tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)\right).$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$2 + 3\operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen} x; \qquad e^{2\tan x} = 1 + e^{\tan x}.$$

5. Esboza las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = -2\arccos(x/3); \qquad y = 2 - \arctan(2x).$$

6. Utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad \text{(c)}\ \lim_{t\to 0} \frac{t - \operatorname{sen} t}{t^3}.$$

7. Usa la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{e^x}; \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}; \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^9}; \qquad \text{(d)}\ \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 \ln t}{e^t}.$$

8. Encuentra la linealización de $f(x)$ en los puntos dados:

$$\text{(a)}\ f(x) = x^2 - 4x, \quad x = 1; \qquad \text{(b)}\ f(x) = \tan x, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

   Enseguida esboza la gráfica de cada una de las funciones dadas, conjuntamente con las correspondientes linealizaciones en el punto dado.

9. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad f(x) = (1+x)^3; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \arctan(2x).$$

10. Encuentra el polinomio de Taylor de grado $n$ en $a = 0$ de las siguientes funciones y estime el error si $n = 5$ y $|x| \leq 1/2$:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \operatorname{sen} x; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = e^x; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

11. Usa los resultados del ejercicio anterior para encontrar el polinomio de Taylor de grado $n$ en $a = 1$ de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad f(x) = e^{x+2}; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{4-x}; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \operatorname{sen}(2-2x).$$

12. Utiliza aproximaciones de Taylor de grado 3 para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

$$\text{(a)} \quad \sqrt{17}; \qquad \text{(b)} \quad (28)^{2/3}; \qquad \text{(c)} \quad \tan(63^\circ).$$

¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.5: 1, 6, 11, 16, 21,..., 66, 67 y 74.
- Sección 7.6: 3, 6, 9, 12, ..., 42.
- Sección 10.8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

# Unidad 20

# Evaluación global

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

## Contenido

Todos los temas del curso.

## Indicadores de evaluación

1. Calcular derivadas de funciones definidas por *sumas, productos, cocientes, potencias y composiciones,* así como de *funciones implícitas.*
2. Calcular derivadas de *funciones trascendentes y sus inversas.*
3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
4. Determinar los intervalos de derivabilidad de una función.
5. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración instantáneas.
6. Resolver problemas de tasas relacionadas.
7. Encontrar los puntos críticos y determinar los valores extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado finito.
8. Utilizar la derivada para resolver problemas de optimización aplicada.
9. Decidir si una función es inyectiva y encontrar su inversa, así como el dominio, el rango, la derivada y la gráfica de la inversa.
10. Simplificar expresiones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
11. Resolver ecuaciones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
12. Usar la regla de L' Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
13. Determinar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad, las asíntotas, los intervalos de monotonía, los extremos locales, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de una función dada (algebraica o trascendente) y usar esa información para esbozar su gráfica.

14. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

15. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO HAYAS ENTENDIDO BIEN EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *No olvides que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 40 % de tu calificación final.*

2. Entrega la tarea de la unidad 10, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Entrega un ensayo en el que expliques como definió Leonhard Euler (1707-1783) la función exponencial y cómo la relacionó con las funciones trigonométricas. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

4. Procura aprobar esta unidad antes del último día de exámenes.

## Tarea de la unidad 10

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula $y'$ para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \sqrt[5]{(x^2+1)^3 x^{\operatorname{sen} x}}, \qquad \text{(b) } y = \log_2(\arctan(e^{\cos x})), \qquad \text{(b) } y^x + x^y = xy.$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a)}\quad 5^{x^2} - 3^{x^2+1} = 2\left(5^{x^2-1} - 3^{x^2-2}\right), \qquad \text{(b)}\quad \log_2(9^{x-1}+7) = 2\log_2(3^{x-1}+1).$$

3. ¿Para qué valores de $p \geq 0$ son tangentes en un punto del primer cuadrante las gráficas de $y = x^p$ y $y = e^x$?

4. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de $y = \arctan x - \ln(\sqrt{x})$ en el intervalo $[e^{-1}, e]$.

5. Se desea fabricar una tanque de gas estacionario de 1 m$^3$ de volumen, que tenga la forma de un cilindro de altura $h$ y radio $r$, rematado en sus extremos con dos hemisferios de radio $r$. Determina las dimensiones $h$ y $r$ del tanque que requiera la mínima cantidad de lámina de acero para su construcción.

6. Encuentre el rectángulo de área máxima que puede circunscribirse en un rectángulo de 2 m de ancho y 3 m de largo.

7. Por la banda derecha de un campo de futból se desplaza un futbolista preparándose para tirar a gol. ¿A qué distancia de la línea final debe realizar el tiro si se supone que lo hará justo cuando el ángulo con el que visualiza la portería (de poste a poste) es máximo. El campo de futból es de 110 por 90 y de poste a poste la portería mide 7 m.

8. Dada la función $y = (x-1)^4 - 4x^2 + 8x - 4$:

   *a*) Encuentra su dominio.
   *b*) Determina su paridad.
   *c*) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   *d*) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   *e*) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   *f*) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   *g*) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

9. Dada la función $y = (x+1)^2 e^{-3x}$:

   *a*) Encuentra su dominio.
   *b*) Determina su paridad.
   *c*) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   *d*) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   *e*) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   *f*) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   *g*) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

10. Dada la función $y = (\ln x)^2/x$:

   *a*) Encuentra su dominio.
   *b*) Determina su paridad.
   *c*) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   *d*) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   *e*) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   *f*) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   *g*) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

11. Utilice un polinomio de Taylor de grado 7 alrededor de $a = 0$ para obtener un valor aproximado de $\ln(1/2)$. Obtenga una estimación del error.

# Cálculo Integral

*"Ser consciente de la propia ignorancia es un gran paso hacia el saber."*

Benjamin Disraeli (1804-1881)

# Unidad 21

# Integral indefinida e integral definida

## Objetivo

Usar un formulario para calcular *antiderivadas* y utilizar *sumas de Riemann* para calcular *integrales definidas* de funciones sencillas.

## Contenido

1. Integrales indefinidas.
2. Estimación de áreas con sumas finitas.
3. Sumas de Riemann.
4. La integral definida.

## Indicadores de evaluación

1. Usar un formulario para calcular integrales indefinidas y verificar el resultado mediante derivación.
2. Utilizar sumas inferiores para obtener valores aproximados del área de una región debajo de la gráfica de una función no negativa.
3. Utilizar sumas superiores para obtener valores aproximados del área de una región debajo de la gráfica de una función no negativa.
4. Usar áreas de figuras conocidas para evaluar integrales sencillas.
5. Utilizar simetrías para simplificar el cálculo de integrales definidas.
6. Utilizar las propiedades de la integral para simplificar el cálculo de integrales.
7. Utilizar sumas de Riemann para calcular integrales definidas de funciones sencillas.
8. Utilizar integrales definidas para calcular áreas de regiones debajo de la gráfica de una función no negativa.

## Actividades

1. Estudia las secciones 4.7, 5.1, 5.2 y 5.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Se recomienda aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 1.

## Tarea de la unidad 1

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula las siguientes integrales y verifica tu respuesta mediante derivación:

$$\text{(a)} \int (2x^3 + 7x - 2)dx, \qquad \text{(b)} \int \left( x^{1/3} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

2. Evalúa las siguientes integrales y verifica tu respuesta mediante derivación:

$$\text{(a)} \int 5\cos x + \sec^2 x \; dx, \qquad \text{(b)} \int 4e^{\theta} - 3\sec\theta\tan\theta d\theta.$$

3. Estima el área debajo de la gráfica de $y = 4x - x^2$ en intervalo [0,4]:

   *a*) Utilizando una suma inferior con ocho rectángulos del mismo ancho.

   *b*) Utilizando una suma superior con ocho rectángulos del mismo ancho.

4. Bosqueja la gráfica de los integrandos y, sin usar antiderivadas, usa áreas de figuras conocidas para evaluar:

$$\text{(a)} \int_0^3 (2x+2)dx, \qquad \text{(b)} \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx.$$

5. Bosqueja la gráfica de los integrandos y, sin usar antiderivadas, usa simetrías para evaluar:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} xdx, \qquad \text{(b)} \int_{-2}^{2} x^3 dx.$$

6. Bosqueja la gráfica de los integrandos y, sin usar antiderivadas, usa simetrías para evaluar:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} (1+x^3)dx, \qquad \text{(b)} \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx$$

7. Considera la función $y = 9 - x^2$ y encuentra una fórmula para la suma inferior $I_n$ que se obtiene al dividir $[0,3]$ en $n$ partes iguales. Luego calcula $\lim_{n\to\infty} I_n$.

8. Si $\int_3^2 f(x)dx = 2$, evalúa

$$\int_2^5 \pi f(x)dx + \int_5^3 f(x)dx + \int_5^2 (\pi f(x) - f(x))dx.$$

9. Usa sumas de Riemann para calcular las áreas de las regiones debajo de las siguientes curvas sobre el intervalo $[0, 3]$:

   (a) $y = 3 - x$; (b) $y = 9 - x^2$.

10. Inscribe un polígono regular de $n$ lados en una circunferencia de radio 1 y nota que está formado por $n$ triángulos isósceles. Usa trigonometría para verificar que todos esos triángulos tienen base igual a $2\,\mathrm{sen}(\pi/n)$ y altura igual a $\cos(\pi/n)$. Calcula el área $A_n$ del polígono y encuentra $\lim_{n\to\infty} A_n$. ¿Obtienes un resultado conocido?

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 4.7: 1, 5, 9, 13, ..., 61.
- Sección 5.1: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 21 y 22.
- Sección 5.2: 39, 41, 43 y 56.
- Sección 5.3: 15, 17, 22, 23, 25, 27, 31, 35, 37, 41, 45, 49, 51, 54, 63, 66, 69.

# Unidad 22

# El teorema fundamental del cálculo y el método de sustitución

## Objetivo

Aplicar las propiedades de la integral y el *teorema fundamental del cálculo* en el cálculo de derivadas e integrales. Evaluar integrales por el método de sustitución.

## Contenido

1. El teorema fundamental del cálculo.
2. El teorema del valor medio para integrales definidas.
3. El método de sustitución.

## Indicadores de evaluación

1. Enunciar e interpretar el teorema del valor medio para integrales definidas.
2. Enunciar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo y utilizarla para calcular derivadas de funciones definidas por integrales con límites variables.
3. Enunciar la parte 2 del teorema fundamental del cálculo y utilizarla para evaluar integrales definidas.
4. Utilizar el método de *sustitución* o *cambio de variables* para calcular integrales.

## Actividades

1. Estudia las secciones 5.4 y 5.5 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Es muy recomendable aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 2.

## Tarea de la unidad 2

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula la derivada de la siguiente función como se indica a continuación:
$$y = \int_0^{x^2} (t^3 - 1)dt.$$
   *a*) Evalúa la integral y deriva el resultado.
   *b*) Usa la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar la integral directamente.
2. Calcula la derivada de
$$y = \int_1^{e^{x^2}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$
3. Calcula la derivada de
$$y = \sqrt{x} \int_{2x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt.$$
4. Usa la parte 2 del TFC para evaluar las siguientes integrales:
$$\text{(a)} \int_{-2}^{2} (2x^3 - x - 2)dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 (5 + 2\sqrt{x} - 3x^{2/3})dx.$$
5. Usa la parte 2 del TFC para calcular las siguientes integrales:
$$\text{(a)} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + \cos x)dx, \qquad \text{(b)} \int_1^e \left(4e^x - \frac{3}{x}\right) dx.$$
6. Usa la regla de sustitución para calcular:
$$\text{(a)} \int 2x(1 + x^2)^{1/2}dx, \qquad \text{(b)} \int e^x(1 - e^x)^{3/5}dx.$$
7. Usa la regla de sustitución para calcular:
$$\text{(a)} \int \frac{dr}{r - 2r^{1/4}}, \qquad \text{(b)} \int \frac{dr}{r \ln r \ln(\ln r)}.$$

8. Usa la regla de sustitución para evaluar:

$$\text{(a)} \int \sec^2(4-5e^z)e^z dz, \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/8} \cos^4(2r)\,\text{sen}(2r)dr.$$

9. Evalúa las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x \; dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} e^{\text{sen}\, z} \cos z dz.$$

10. En un tramo recto de 1 km de una carretera en construcción, se han dejado montones de grava cuyo perfil está dado en metros por $f(x) = (1/2)\,\text{sen}^2(\pi x/5)$, $0 \leq x \leq 1000$. Determina (a) el número de montículos de grava que hay en ese tramo de la carretera, (b) la altura $a$ de la carretera cuando la grava se extienda y se nivele y (c) todos los valores de $x$ para los cuales $f(x) = a$.

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 5.4: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 31, 33, 37, 39, 43, 45 y 48.
- Sección 5.5: 2, 5, 8, 11, ..., 51.

# Unidad 23

# Área entre curvas, trabajo e integración por partes

## Objetivo

Utilizar integrales para calcular áreas de regiones limitadas por curvas y el trabajo realizado por una fuerza variable. Usar el método de *integración por partes* para calcular integrales.

## Contenido

1. Área entre curvas.
2. Trabajo.
3. Integración por partes.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar integrales para calcular áreas de regiones limitadas por curvas.
2. Utilizar integrales para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable sobre un objeto con movimiento rectilíneo.
3. Justificar el método de integración por partes.
4. Usar el método de integración por partes para calcular integrales.

## Actividades

1. Estudia las secciones 5.6, 6.5 y 8.1 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Es recomendable aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 3.

# Tarea de la unidad 3

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $y = x^2/2, \quad y = 2x;$ (b) $y = 4x - x^2, \quad y = 3.$

2. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 4x + 4;$ (b) $y^2 = x \quad x + 3y^2 = 8.$

3. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $x = y^3 - 2y, \quad x = 2y;$ (b) $y = x^3 - x, \quad y = x^2.$

   *Reto:* Sin usar tu calculadora, muestra que la respuesta del inciso (b) es $13/12$.

4. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2;$ (b) $y = xe^x, \quad y = ex.$

5. Una cisterna cilíndrica circular de 1 m de radio y 3 m de altura está llena de agua y se encuentra en posición vertical. Determina el trabajo realizado para subir la mitad del agua a una altura de 4 m por arriba de la parte superior de esa cisterna.

6. Una cisterna cilíndrica circular de 1 m de radio y 3 m de altura está llena de agua y se encuentra en posición horizontal. Determina el trabajo realizado para subir la mitad del agua a una altura de 4 m por arriba de la parte superior de esa cisterna.

7. Usa integración por partes para calcular:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx;$ (b) $\displaystyle\int x^2 e^{-3x} dx.$

8. Usa integración por partes para calcular:

   (a) $\displaystyle\int x\cos(2x)dx;$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen}(2x)dx.$

9. Usa integración por partes para calcular:

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x dx;$ (b) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} x\ln x \; dx.$

10. Usa integración por partes para calcular:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(5x)dx;$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)dx.$

11. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

    (a) $y = x/2, \quad y = xe^{-x};$ (b) $y = x, \quad y = x\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi.$

12. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

    (a) $y = x, \quad y = x\ln x;$ (b) $\pi y + \pi = 2(\pi - x), \quad y = \cos x.$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 5.6: 1, 5, 9, ..., 77.
- Sección 6.5: 1, 6, 9, 11, 15, 17 y 20.
- Sección 8.1: 2, 5, 8, 11,..., 50.

# Unidad 24

# Primer examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar un formulario para calcular integrales indefinidas básicas.
2. Calcular sumas de Riemann de una función en un intervalo finito para aproximar áreas o integrales.
3. Usar sumas de Riemann para evaluar integrales definidas sencillas.
4. Usar áreas de figuras conocidas para evaluar integrales sencillas.
5. Utilizar simetrías para simplificar el cálculo de integrales definidas.
6. Utilizar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar funciones definidas por integrales con límites variables.
7. Utilizar la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para evaluar integrales definidas.
8. Utilizar la regla de *sustitución* o *cambio de variables* para calcular integrales.
9. Utilizar integrales para calcular áreas de regiones limitadas por curvas.
10. Utilizar integrales para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable sobre un objeto con movimiento rectilíneo.
11. Utilizar el método de integración por partes para calcular integrales.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 25 % de tu calificación final.*

2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo en el que expliques en qué consiste el método de sumas de Riemann Riemann (1826–1866) para calcular integrales definidas. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 4.

4. **Si reciclas dos veces tu primer examen integrador, para presentarlo por tercera vez es indispensable que entregues la siguiente tarea correctamente resuelta.**

# Tarea de la unidad 4

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Utiliza sumas de Riemann para calcular el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$ en el intervalo $[0.5, 2]$.

2. Utiliza simetría para calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^3 dx}{1 + x^{100}}$.

3. Calcula $y'$ si
$$y = \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^4 x}dx.$$

4. Una cisterna en forma de prisma rectangular de 2 m de ancho, 3 de largo y 2.5 de altura está llena de agua. Determina el trabajo realizado para subir las dos terceras partes del agua a una altura de 10 m por arriba de la parte superior de esa cisterna.

5. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $y = 2 - |x - 1|, \quad y = 2x - x^2;$ (b) $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2.$

6. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

   (a) $y = |x^2 - 4|, \quad 2y = x^2 + 8;$ (b) $x + y^2 = y^3, \quad y = x/2.$

7. Calcula las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx,$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}dx;$ (c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^{3/2}}.$

8. Calcula las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}^2 x dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/5}}{\sqrt{x}}dx;$ (c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} x \ln x dx.$

9. Calcula las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx,$ (b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx;$ (c) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\ dx.$

# Unidad 25

# Integrales trigonométricas

## Objetivo

Utilizar *identidades trigonométricas* y *sustituciones trigonométricas* para calcular integrales.

## Contenido

1. Integrales trigonométricas.
2. Integración por sustituciones trigonométricas.

## Indicadores de evaluación

1. Usar identidades trigonométricas para calcular integrales trigonométricas.
2. Utilizar el método de substitución trigonométrica para calcular integrales.

## Actividades

1. Estudia las secciones 8.2 y 8.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 5.

## Tarea de la unidad 5

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} \cos^2 x \operatorname{sen} x dx; \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/6} \tan x \sec^3 x dx.$$

2. Usa una identidad trigonométrica para calcular:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx; \qquad \text{(b)} \int \tan^2 x dx.$$

3. Usa una identidad trigonométrica para calcular:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x dx; \qquad \text{(b)} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx.$$

4. Usa una identidad trigonométrica para calcular:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} \cos x \cos(2x) dx; \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos(5x) dx.$$

5. Usa una identidad trigonométrica para calcular:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx; \qquad \text{(b)} \int \sec^2 x \tan^2 x dx.$$

6. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int x^2 \cos^2 x dx; \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x} \tan^2(\ln x) dx.$$

7. Realiza las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \sec^3 x \operatorname{sen}^6 x \; dx; \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 dx.$$

8. Utiliza una sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \sqrt{4 - x^2} \; dx; \qquad \text{(b)} \int \sqrt{9 + 4x^2} \; dx.$$

9. Utiliza una sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}; \qquad \text{(b)} \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

10. Utiliza una sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{x dx}{\sqrt{9x^2 - 1}}; \qquad \text{(b)} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 25)^{5/2}}.$$

11. Realiza las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{\operatorname{sen} r dr}{1 + \operatorname{sen} r}; \qquad \text{(b)} \int \frac{\sec^3(\arctan t)}{t^2 + 1} dt.$$

12. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 4)^{3/2}}; \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{1 + 2\cos^2 x}.$$

# Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 8.2: 3, 6, 9, 12,..., 66.
- Sección 8.3: 1, 4, 7, 10, 13,..., 46.

# Unidad 26

# Integración por fracciones parciales

## Objetivo

Utilizar el método de *fracciones parciales* para calcular integrales.

## Contenido

1. Integración de funciones racionales por fracciones parciales.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar el método de fracciones parciales para calcular integrales de funciones racionales.

## Actividades

1. Estudia la sección 8.4 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 6.

## Tarea de la unidad 6

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Decide si los siguientes polinomios son reducibles y en caso afirmativo factorízalos:

   (a) $x^2 + 2x + 5$; (b) $x^2 + 4x + 12$; (c) $x^2 + 7x + 12$.

2. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{x\ dx}{x^2+2x+2}; \qquad \text{(b)} \int \frac{x\ dx}{x^2+x+1}.$$

3. Usa fracciones parciales para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^2 \frac{dx}{x^2-16}; \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{xdx}{x^2-x-6}.$$

4. Usa fracciones parciales para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{x(x-1)^2}; \qquad \text{(b)} \int \frac{xdx}{x^4+2x^3+x^2}.$$

5. Usa fracciones parciales para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_4^5 \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}dx; \qquad \text{(b)} \int \frac{x^3}{4x-x^3}dx.$$

6. Usa fracciones parciales para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_2^3 \frac{dx}{x^3+x}dx; \qquad \text{(b)} \int \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2-1)}dx.$$

7. Sin calcular las constantes, propón una expansión en fracciones parciales para cada una de las siguientes funciones racionales:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x+1}{(x^3-x^2)(x^2+4)^2}; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2(x^2-4)^3}.$$

8. Sin calcular las constantes, propón una expansión en fracciones parciales para cada una de las siguientes funciones racionales:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^2-5}{(x-1)^2(x^2-1)^2(x^2+x-1)(x^2+x+1)}; \quad \text{(b) } f(x) = \frac{x-7}{(x^2-9)(x^3-27)(x+5)}.$$

9. Utiliza el método de Heaviside para encontrar una expansión en fracciones parciales de la función racional

$$f(x) = \frac{x^2+5}{(x+1)(x-1)(x+2)}.$$

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 8.4: 2, 5, 8, 11,..., 50.

# Unidad 27

# Segundo examen integrador

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

## Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

## Indicadores de evaluación

1. Usar identidades trigonométricas para calcular integrales trigonométricas.
2. Utilizar el método de substitución trigonométrica para calcular integrales.
3. Utilizar el método de fracciones parciales para calcular integrales de funciones racionales.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO HAYAS ENTENDIDO BIEN EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Ten en cuenta que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 35 % de tu calificación final.*
2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo en el que expliques como utilizar la notación de diferenciales de Leibnitz (1646–1716) para formular la regla de la cadena y calcular integrales definidas. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 7.
4. **Si reciclas dos veces tu segundo examen integrador, para presentarlo por tercera vez debes entregar la siguiente tarea correctamente resuelta.**

# Tarea de la unidad 7

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Realiza las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 dx; \qquad \text{(b)} \quad \int \sec^2 x \operatorname{sen}^4 x \ dx.$$

2. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\tan^2 x}{\csc^2 x} dx, \qquad \text{(b)} \quad \int x \cos^3 x dx.$$

3. Utiliza una sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int \sqrt{4 - 9x^2} \ dx; \qquad \text{(b)} \int \sqrt{1 + 5x^2} \ dx, \qquad \text{(c)} \int \sqrt{7x^2 - 5} \ dx.$$

4. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x - 2}{x^3 - 1} dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x} dx.$$

5. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{1 + (\ln t)^2}}, \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x^4}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

# Unidad 28

# Integrales impropias

## Objetivo

Evaluar integrales *impropias* y usar los criterios básicos para determinar la *convergencia* ó *divergencia* de este tipo de integrales.

## Contenido

1. Integrales impropias con límites de integración infinitos.
2. Integrales impropias de integrandos con asíntotas verticales.
3. Criterios de convergencia.
4. Criterios de divergencia.
5. Aplicaciones.

## Indicadores de evaluación

1. Evaluar integrales impropias con límites de integración infinitos.
2. Evaluar integrales impropias cuyos integrandos poseen asíntotas verticales.
3. Utilizar el método de comparación directa para determinar la convergencia o divergencia de una integral impropia.
4. Utilizar el método de comparación del límite para determinar la convergencia o divergencia de una integral impropia.
5. Calcular áreas de regiones no acotadas limitadas por curvas.

## Actividades

1. Estudia la sección 8.7 de la Decimosegunda edición del Thomas y el material sobre polinomios de Taylor que se te entregará en el SAI. Resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 8.

# Tarea de la unidad 8

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque*
*aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza*
*hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Evalúa las siguientes integrales impropias con límites infinitos:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{4+t^2}.$$

2. Evalúa las siguientes integrales impropias con límites infinitos:

$$\text{(a)} \int_0^\infty te^{-3t}dt; \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x dx$$

3. Evalúa las siguientes integrales impropias cuyos integrandos poseen asíntotas verticales:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \qquad \text{(b)} \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt[3]{4-t}}.$$

4. Evalúa las siguientes integrales impropias cuyos integrandos podrían poseer asíntotas verticales:

$$\text{(a)} \int_0^1 \ln x dx; \qquad \text{(b)} \int_0^e x \ln(x^2) dx.$$

5. Determina los valores de $\alpha$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}; \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta}.$$

6. Determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^{3/2}}; \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

7. Determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx; \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}.$$

8. Muestra que la siguiente integral impropia es convergente:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

*Sugerencia:* Primero explica porqué el hecho de que el integrando es una función par y que su discontinuidad en $x = 0$ es removible, reducen el problema a establecer la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$. Luego, integra por partes y verifica que

$$\int_1^M \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Finalmente, usa el criterio de comparación para deducir la convergencia del lado derecho de esta última identidad.

9. Encuentra el área de la región del primer cuadrante limitada por $y = xe^{-x}$ y $y = e^{-x}$.

10. Encuentra el área de la región limitada por $y = x$ y $y = x \ln x$.

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 8.7: 1, 6, 11, 16, 21,..., 61.

# Unidad 29

# Aplicaciones de la integral

## Objetivo

Aplicar la integral definida para calcular *volúmenes de sólidos* y *longitudes de curvas.*

## Contenido

1. Volúmenes por secciones transversales.
2. Volúmenes de revolución por el método de discos.
3. Volúmenes de revolución por el método de arandelas.
4. Volúmenes de revolución por el método de casquillos.
5. Longitudes de curvas.

## Indicadores de evaluación

1. Calcular volúmenes de sólidos a partir de sus secciones transversales.
2. Calcular volúmenes de sólidos de revolución con el método de discos.
3. Calcular volúmenes de sólidos por medio de casquillos cilíndricos.
4. Calcular longitudes de curvas planas.

## Actividades

1. Estudia las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 9.

# Tarea de la unidad 9

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. La base de un sólido es un disco de radio 1 y las secciones transversales del sólido son cuadrados. Si las bases de esos cuadrados son cuerdas del disco, perpendiculares a un diámetro fijo del mismo, dibuja el sólido y calcula su volumen.

2. Dibuja el sólido que se obtiene al girar alrededor del eje $y$ la región determinada $y = 2x$, $y = 0$ y $x = 10$ y calcula el volumen del sólido generado (a) por el método de arandelas y (b) por el método de casquillos. Confirma que el volumen resultate es el mismo por los dos métodos.

3. Dibuja los sólidos que se obtienen al girar alrededor del eje $x$ las regiones determinadas por las siguientes curvas y calcula sus volúmenes usando el método de discos:

   (a) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; (b) $y - x^2 = x$, $y = 0$.

4. Dibuja los sólidos que se obtienen al girar alrededor del eje $x$ las regiones determinadas por los siguientes curvas y calcula sus volúmenes usando el método de arandelas:

   (a) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$; (b) $y = 4 - x^2$, $y + x = 2$.

5. Dibuja los sólidos que se obtienen al girar alrededor del eje $y$ las regiones determinadas por los siguientes curvas y calcula sus volúmenes usando el método de casquillos:

   (a) $y^2 = x$, $y = x/2$; (b) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$.

6. Dibuja el sólido que se obtiene al girar la región limitada por $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ alrededor del eje $x$ y encuentra su volumen.

7. Determina el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del la recta $y = 2$ la región del primer cuadrante limitada por $x = 2y - y^2$ .

8. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del la recta $x = -1$ la región limitada por $y + x^2 = 2x$ y $y = x$.

9. Determina la longitud de las siguientes curvas:

   (a) $x = \cos t$, $y = t + \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$, (b) $x = (y^3/3) + (1/4y)$, $1 \leq y \leq 3$.

10. Dibuja y calcula el volumen de la intersección de dos cilindros, de radio $a > 0$, cuyos ejes se intersecan perpendicularmente.

11. Dibuja los sólidos que se obtienen al girar alrededor del eje $x$ las regiones determinadas por las siguientes curvas y calcula sus volúmenes:

    (a) $xy = 1$, $y = 0$, $x \geq 1$; (b) $y = x \ln x^2$, $y = 0$.

# Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 6.1: 1, 3, 5, 8, 10, 13, 15, 17, 21, 27, 31, 35, 41, 45, 47, 49 y 53.
- Sección 6.2: 1, 5, 13, 15, 17, 21, 23, 25, 28, y 32.
- Sección 6.3: 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

# Unidad 30

# Evaluación global

*"Un caminar de río que se curva,*
*avanza, retrocede, da un rodeo*
*y llega siempre: ..."*

Octavio Paz (1914–1998)

## Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

## Contenido

Todos los temas del curso.

## Indicadores de evaluación

1. Utilizar un formulario para calcular integrales indefinidas.
2. Usar sumas de Riemann para evaluar integrales definidas sencillas.
3. Utilizar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar funciones definidas por integrales con límites variables.
4. Utilizar la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para evaluar integrales definidas.
5. Utilizar las técnicas de cambio de variables, integración por partes para calcular integrales.
6. Utilizar identidades trigonométricas y sustitución trigonométrica para calcular integrales.
7. Utilizar el método de fracciones parciales para calcular integrales de funciones racionales.
8. Decidir si una integral impropia es convergente o divergente.
9. Usar integrales para calcular longitudes de curvas planas, áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos.
10. Utilizar integrales para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable sobre un objeto con movimiento rectilíneo.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *No olvides que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 40 % de tu calificación final.*

2. Entrega la tarea de la unidad 10, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Entrega un ensayo en el que expliques en qué consiste el principio de Cavalieri (1598-1647) y cómo utilizarlo para calcular el volumen de la esfera, sin utilizar integrales. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

4. Procura aprobar el examen de esta unidad antes de finalizar la semana 10.

## Tarea de la unidad 10

*"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."*
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Utiliza sumas de Riemann para calcular el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ en el intervalo $[0, 2]$.

2. Esboza la gráfica del integrando de $\displaystyle\int_0^2 \cos^{-1}(x-1)dx$ y utiliza simetrías para obtener el valor de esta integral sin calcular antiderivadas. Luego integra por partes y comprueba tu resultado.

3. Investiga y explica como se puede calcular el volumen de una esfera sin utilizar cálculo integral. ¡Arquímedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.) lo hizo dos mil años antes de que se inventara el cálculo integral!

4. Una cisterna esférica de 2 m de radio está llena de agua. Determina el trabajo realizado para subir la mitad del agua a una altura de 10 m por arriba de la parte superior de esa cisterna.

5. Dibuja las regiones limitadas por las curvas dadas y calcula sus áreas:

$$\text{(a) } y = x/2, \quad y = x\ln x^2; \qquad \text{(b) } 2y = -\pi(x-1), \quad y = \arccos x.$$

6. Calcula las siguientes integrales

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}; \qquad \text{(c)} \int_0^{\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)dx.$$

7. Determina cuales de las siguientes integrales son convergentes:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{1-\cos t}}, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x^3+1)}; \qquad \text{(c)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}.$$

8. Utiliza dos métodos diferentes para calcular, de dos maneras distintas, el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = -5$ la región limitada por $x = 0$, $y = 0$ y $y = 10 - x$.

9. Utiliza dos métodos diferentes para calcular, de dos maneras distintas, el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje y la región limitada por $x = 0$, $y = 0$ y $y = \arccos(x - 1)$.

10. Dibuja el sólido que se obtiene al girar alrededor del eje $y$ la región limitada por $y = 2x$ y $y = x \ln x$ y calcula su volumen.

11. Esboza el sólido que se obtiene al girar alrededor del eje $x$ la región del primer cuadrante limitada por $y = 0$ y $y = xe^{-x}$ y calcula su volumen.

# Formulario de cálculo CSAI81

## Perímetros, áreas y volúmenes

1. **Perímetro**

   - Rectángulo de base $b$ y altura $a$:
   $$P = 2a + 2b.$$
   - Polígono regular de $n$ lados de longitud $l$:
   $$P = nl.$$
   - Círculo de radio $r$:
   $$P = 2\pi r, \text{ con } \pi = 3{,}14159...$$

2. **Área**

   - Triángulo de base $b$ y altura $a$:
   $$A = \frac{ba}{2}.$$
   - Triángulo de lados $a$, $b$ y $c$, *Fórmula de Herón de Alejandría:*
   $$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$
   $S = (a+b+c)/2$ se llama semiperímetro del triángulo.
   - Rectángulo de base $b$ y altura $a$:
   $$A = ab.$$
   - Trapecio de base mayor $B$, base menor $b$ y altura $a$:
   $$A = \frac{(B+b)a}{2}.$$
   - Polígono regular de $n$ lados de longitud $l$ y apotema de longitud $a$:
   $$A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}.$$
   El *apotema* de un polígono regular es la distancia entre el centro y cualquiera de sus lados.
   - Círculo de radio $r$:
   $$A = \pi r^2.$$
   - Elipse de semiejes $a$ y $b$:
   $$A = \pi ab.$$

- Esfera de radio $r$:
$$A = 4\pi r^2.$$
- Área lateral de un cono de radio $r$ y altura $a$:
$$A = \pi r\sqrt{r^2 + a^2}.$$

3. **Volumen**

- Caja de altura $a$ y base rectangular de lados $b$ y $c$:
$$V = abc.$$
- Esfera de radio $r$:
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$
- Cilindro de radio $r$ y altura $a$:
$$V = \pi r^2 a.$$
- Cono de radio $r$ y altura $a$:
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

## Trigonometría

- **Teorema de Pitágoras.**
*En un triángulo rectángulo de catetos $a$ y $b$ e hipotenusa $h$ (Figura 1) se cumple la relación*
$$h^2 = a^2 + b^2.$$
*Recíprocamente, si en un triángulo de lados $a$, $b$ y $h$ se cumple la relación anterior, entonces es un triángulo rectángulo de catetos $a$ y $b$ e hipotenusa $h$.*
- Funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ (Figura 1):
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{h}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{h}, \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}.$$

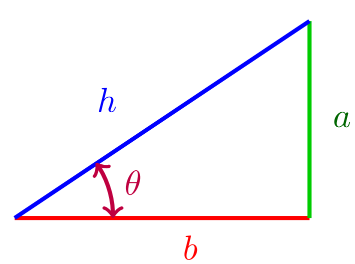


Figura 1: Triángulo rectángulo

- Las funciones trigonométricas de los ángulos de 45°, 30° y 60° se calculan fácilmente usando los triángulos de la Figura 2.

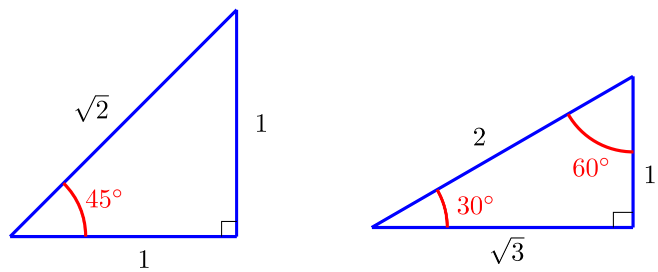


Figura 2: Triángulos especiales

- Funciones trigonométricas del ángulo $t$ (Figura 3):

$$\operatorname{sen} t = y, \qquad \cos t = x, \qquad \tan t = \frac{y}{x}.$$

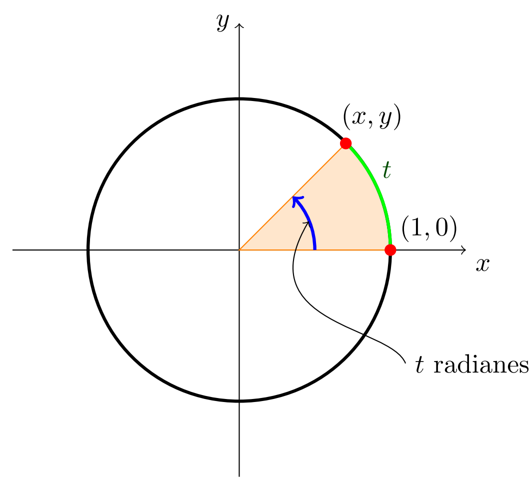


Figura 3: Círculo trigonométrico

- Conversión de grados a radianes. Si la medida de un ángulo en grados es $A$ y en radianes $\theta$, entonces,

$$\theta \; = \frac{\pi}{180} A.$$

- Longitud $l$ de un arco de $\theta$ radianes de un círculo de radio $r$:

$$l = \theta r.$$

- Área de un sector de $\theta$ radianes de un círculo de radio $r$:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

- Identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

- **Identidades pitagóricas:**

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1,\qquad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\qquad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.$$

- **Fórmulas para la suma:**

$$\operatorname{sen}(A\pm B)=\operatorname{sen}A\cos B\pm\operatorname{sen}B\cos A,\qquad \cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B.$$

- **Fórmulas para el ángulo doble:**

$$\operatorname{sen}(2u)=2\operatorname{sen}u\cos u,\qquad \cos 2u=\cos^2 u-\operatorname{sen}^2 u.$$

- **Fórmulas para el ángulo medio:**

$$\operatorname{sen}^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2},\qquad \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}.$$

- **Ley de los senos.** *En un triángulo de lados $a$, $b$ y $c$, cuyos ángulos opuestos respectivos son $A$, $B$ y $C$, se satisface la relación*

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a}=\frac{\operatorname{sen}B}{b}=\frac{\operatorname{sen}C}{c}.$$

- **Ley de los cosenos.** *En un triángulo de lados $a$, $b$ y $c$, en el que $C$ es el ángulo opuesto a $c$, se satisface la relación*

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

- **Otras fórmulas:**

- $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$
- $\operatorname{sen}(-u)=-\operatorname{sen}u$
- $\cos(-u)=\cos u$
- $\tan(-u)=-\tan u$
- $-|\theta|\leq\operatorname{sen}\theta\leq|\theta|$.

# Propiedades de logaritmos y exponenciales

1. $\ln(e^x)=x,\ x\in\mathbb{R}$.
2. $e^{\ln x}=x,\ x>0$.
3. $\ln(x^y)=y\ln x,\ x>0,\ y\in\mathbb{R}$.
4. $a^x=e^{x\ln a},\ a>0$.
5. $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a},\ x>0,\ a>0,\ a\neq 1$.
6. $\ln(xy)=\ln x+\ln y,\ x>0,\ y>0$.
7. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y,\ x>0,\ y>0$.
8. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a},\ a>0,\ b\neq 1,\ b>0$.

# Reglas de derivación

Notación: $u'=\dfrac{du}{dx}$

- **Linealidad**

$$(cu)'=cu',\qquad (u\pm v)'=u'\pm v'.$$

- **Regla del producto**

$$(uv)'=uv'+vu'.$$

- **Regla del cociente**
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$
- **Regla de la cadena**
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- **Diferenciación logarítmica**
$$(\ln \mu)' = \frac{\mu'}{\mu}.$$
- **Otras fórmulas**

1. Si $c$ es una constante, $(c)' = 0$
2. $(|u|)' = \dfrac{u}{|u|}(u')$
3. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
4. $(a^u)' = (\ln a)a^u u'$
5. $(e^u)' = e^u u'$
6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{(\ln a)u}$
7. $(\operatorname{sen} u)' = (\cos u)u'$
8. $(\cos u)' = -(\operatorname{sen} u)u'$
9. $(\tan u)' = (\sec^2 u)u'$
10. $(\cot u)' = -(\csc^2 u)u'$
11. $(\sec u)' = (\sec u \tan u)u'$
12. $(\csc u)' = -(\csc u \cot u)u'$
13. $(\text{arc sen } u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15. $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
16. $(\text{arccot } u)' = -\dfrac{\mathrm{u}'}{1+\mathrm{u}^2}$
17. $(\text{arcsec } u)' = \dfrac{\mathrm{u}'}{|\mathrm{u}|\sqrt{\mathrm{u}^2-1}}$
18. $(\text{arccsc } u)' = -\dfrac{\mathrm{u}'}{|\mathrm{u}|\sqrt{\mathrm{u}^2-1}}$

# Fórmulas básicas de integración

- **Linealidad**
$$\int kf(u)du = k\int f(u)du,\ k \in \mathbb{R}; \qquad \int (f(u) \pm g(u))\, du = \int f(u)du \pm \int g(u)du.$$
- **Fórmula de integración por partes**
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \text{o bien} \quad \int udv = uv - \int vdu.$$
- **Regla de sustitución o de cambio de variables.** Si $u = g(x)$, entonces
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{o} \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

- **Otras fórmulas:**

1. $\int du = u + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C,\ u \neq 0$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int e^u du = e^u + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\ du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\ du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \tan u\ du = -\ln |\cos u| + C$
   $= \ln |\sec u| + C$
9. $\int \cot u\ du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
10. $\int \sec u\ du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
11. $\int \sec^2 u\ du = \tan u + C$
12. $\int \csc u\ du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$
13. $\int \csc^2 u\ du = -\cot u + C$
14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0$
15. $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0$
17. $\int \sec u \tan u\ du = \sec u + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}}$
    $= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C,\ \text{a} \neq 0.$