Cálculo de Varias Variables
Unidad 7: Integración múltiple

En los ejercicios 1 a 6 calcule la integral
1. $\int_0^{\ln 2}\int_0^1 xydydx$
2. $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 xydydx$
3. $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 x\cos xydydx$
4. $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2dydx$
5. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin y} e^x\cos ydxdy$
6. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)dydx$
En los ejercicios 7 a 16 calcular la integral doble sobre la región R
7. $\int\int_R 4xy^3dA,\ R=\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,\ -2\leq y\leq 2\}$
8. $\int\int_R(x\sin y-y\sin x)dA,\ R=\{(x,y)|0\leq x\leq \pi/2,\ 0\leq y\leq \pi/3\}$
9. $\int\int_R\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}dA$, R es la región del primer cuadrante encerrda por $y=x^2$, $y=4$ y $x=0$
10. $\int\int_R xydA$, donde R es la región acotada por el trapezoide con vértices en $(1,3),(5,3),(2,1),(4,1)$
11. $\int\int_R x\cos xydA$, donde R es la región encerrada por $x=1$, $x=2$, $y=\pi/2$ y $y=\frac{2\pi}{x}$.
12 $\int\int_R\sin(y^3)dA$, donde R es la región acotada por $y=\sqrt{x}$, $y=2$ y $x=0$.
13. $\int\int_R xdA$, donde R es la región acotada por $x=\ln y$, $x=0$ y $y=e$.
14. $\int\int_R e^{-(x^2+y^2)}dA$, donde R es la región encerrad por el circulo $x^2+y^2=1$
15. $\int\int_R\sqrt{9-x^2-y^2}dA$, donde R es la región del primer cuadrante dentro del círculo $x^2+y^2=9$
16. $\int\int_R 2ydA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por el círculo $(x-1)^2+y^2=1$ y abajo por la linea $y=x$.
En los ejercicios 17 a 20 calcular integral convirtiendo a coordenadas polares
17. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx$
18. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\cos(x^2+y^2)dxdy$
19. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dydx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
20. $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$
En los ejercicios 21 a 25 use integral doble para calcular el volumen del sólido que se indica
21. El tetraedro que esta en el primer octante y que esta acotado por los tres

planos coordenados y el plano $z = 5 - 2x - y$
22. EL sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 3-x$
24. El sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$
25. El sólido que esta acotado, arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, abajo por el plano xy y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$
En los ejercicios 26 a 36 calcular la integral triple, representar en cada caso la región de integración.
26. $\int\int\int_G xy^2z^3dV$, donde G es el sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$
27. $\int\int\int_G (1+x+y+z)^{-1}dV$, donde G es el sólido limitado por los tres planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$
28. $\int\int\int_G xyzdV$, siendo $G = \{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
29. $\int\int\int_G \sqrt{x^2 + y^2}dV$, donde G es el sólido formado por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$
En los ejercicios 30 y 32 calcular las integrales pasando a coordenadas cilíndricas
30. $\int\int\int_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, donde G es el sólido limitado por la superficie$x^2+ y^2 = 2x$ y el plano $z = 2$
31. $\int\int\int_G dxdydz$, donde G es el solido limitado por los tres planos coordenados, la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y = 1$
32. $\int_{-5}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\int_0^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}dzdydx$
En los ejercicios 33 y 34, calcular la integral mediante la transformación a coordenadas esféricas.
33. $\int\int\int_G dxdydz$, siendo G le esfera de radio a y centro el origen
34. $\int\int\int_G dxdydz$, siendo G el sólido limitado entre dos esferas concentricas de radios a y b, $0 < a < b$
35. Calcule la integral triple

$$\int\int\int_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dV$$

usando coordenadas esfericas si a) Q es el hemisferio superior de $x^2+y^2+z^2 = 25$; b) Q es el hemisferio inferior de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

En los ejercicios 36 a 39 evalúe $\int_C f(x, y)dx$, $\int_C f(x, y)dy$ e $\int_C f(x, y)ds$ sobre la curva indicada C
36. $f(x, y) = 2xy$, $C : x = 5\cos t, y = 5 \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi/4$
37. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$, $C : x = 2t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$

38. $f(x,y) = 3x^2 + 6y^2$, $C : y = 2x + 1, -1 \leq x \leq 0$
39. $f(x,y) = x^2/y^3$, $C : y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $1 \leq x \leq 8$
40. Evalúe $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$, C es el arco de la curva $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$.
41. Evalúe $\int_C \sin x dx + \cos y dy$, C consiste de de la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1,0)$ a $(-1,0)$ y el segmento de recta desde $(-1,0)$ a $(-2,3)$
42. Evalúe $\int_C (x^2 - y^2)ds$, $C : x = 5\cos t, y = 5\operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$
En los ejercicios 43 y 44 evalúe $\int_C f(x,y,z)dx$, $\int_C f(x,y,z)dy$, $\int_C f(x,y,z)dz$ e $\int_C f(x,y,z)ds$ sobre la curva indicada C
43. $f(x,y,z) = z$, $C : x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
44. $f(x,y,z)4xyz$, $C : x = t^3/3, y = t^3, z = 2t$, $0 \leq t \leq 1$
45. Evalúe $\int_C xyz dS$, $C : x = 2\sin t, y = t, z = -2\cos t$, $0 \leq t \leq \pi$
46. Evalúe $\int_C xe^{yz} dS$, C es el segmento de recta de $(-1,5,0)$ a $(1,6,4)$
47. Evalúe $\int_C (x + yz)dx + 2xdy + xyzdz$, C consta de los segmentos de recta de $(1,0,1)$ a $(2,3,1)$ y de $(2,3,1)$ a $(2,5,2)$
48. Determine una función f tal que $F = \nabla f$ y use este hecho para evaluar la integral $\int_C F \cdot d\gamma$ a lo largo de la curva dada C:
a) $F(x,y) = (x^2, y^2)$, C es el arco de parábola $y = 2x^2$ de $(-1,2)$ a $(2,8)$.
b) $F(x,y) = xy^2\mathrm{i} + \mathrm{x^2yj}$, $C : \gamma(t) = (t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t)$ donde $0 \leq t \leq 1$.
c) $F(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}\,\mathrm{i} + \arctan \mathrm{x}\,\mathrm{j}$, $C : \gamma(t) = t^2\mathrm{i} + 2\mathrm{tj}$, $0 \leq t \leq 1$
d) $F(x,y,z) = y^2\cos z\,\mathrm{i} + 2\mathrm{xy}\cos \mathrm{z}\,\mathrm{j} - \mathrm{xy^2}\operatorname{sen}\mathrm{z}\,\mathrm{k}, \gamma(t) = t^2\,\mathrm{i} + \operatorname{sen}\mathrm{t}\,\mathrm{j} + \mathrm{t}\,\mathrm{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
49. Sea $F(x,y,z) = x\mathrm{i} + \mathrm{yj} + \mathrm{zk}$, calcular la integral de F a lo largo de la trayectoria $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
50. Evaluar $\int_\sigma yzdx + xzdy + xydx$, donde σ consta de los segmentos de recta que une los puntos $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$ y $(0,1,0)$ con $(0,0,1)$.
51. Sea $F(x,y,z) = (z^3 + 2xy)\,\mathrm{i} + \mathrm{x^2}\,\mathrm{j} + 3\mathrm{xz^2}\,\mathrm{k}$. Mostrar que la integral de F a lo largo del perímetro del cuadrado unitario es cero.
En los problemas 52 a 55 verifique el T. de Green calculando ambas integrales
52. $\int_C (x - y)dx + xydy = \int\int_R (y + 1)dA$, C es el triángulo de vértices $(0,0), (1,0), (1,3)$
53. $\int_C 3x^2ydx + (x^2 - 5y)dy = \int\int_R (2x - 3x^2)dA$, C es rectángulo de vértices en $(-1,0), (-1,1), (1,0), (1,1)$
54. $\int_C -y^2dx + x^2dy = \int\int_R (2x + 2y)dA$, C es el la circunferencia $x = 3\cos t,\ y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
55. $\int_C -2y^2dx + 4xydy = \int\int_R 8ydA$, C es la frontera de la región compren-

dida en el primer cuadrante por las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$.
En los ejercicios 56 a 60 emplee el T. de Green para calcuar la integral dada
56. $\int_C 2ydx + 5xdy$, donde C es la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$.
57. $\int_C (x + y^2)dx + (2x^2 - y)dy$, donde C es la frontera de la región $y = x^2$ y $y = 4$.
58. $\int_C e^{2x} \operatorname{sen} 2ydx + e^{2x} \cos 2ydy$, donde C es la elipse $9(x-1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$.
59. $\int_C^{x^2} dx + 2\tan^{-1} xdy$, Donde C es el triángulo de vértices $(0,0), (0,1), (-1,1)$.
60. $\int_C xy^2dx + 3\cos ydy$, donde C es la forntera en el primer cuadrante determinada por las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$.