Cálculo de Varias Variables
Unidad 4: Derivada direccional y planos tangentes

1. Calcular el gradiente de las siguientes funciones
a) $f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$
b) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$
2. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones, en los puntos indicados en las direcciones dadas.
a) $f(x, y) = x + 2y - 3y^2$, $(1, 2)$, $u = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$
b) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(1, 1, 1)$, $u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
c) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 0, 1)$, $u = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$
d) $f(x, y, z) = \tan(xyz) + \sin(xy) - \cos(xz)$, $(0, 1, 1)$, $u = (1/\sqrt{26}, 3/\sqrt{26}, 4/\sqrt{26})$
e) $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$, $(3, -1)$, $\theta = \pi/4$
3. Demostrar que $2\sqrt{5}$ es la derivada direccional de $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ en $(1, 1, 2)$ en la dirección de $1/\sqrt{5}(1, 2)$.
4. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$, y con el determine la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$, en el punto $(1, 2)$.
5. Encontrar los planos tangentes a las superficies en el punto indicado
a) $x^2 + 2y^2 + 3zx = 10$, $(1, 2, 1/3)$
b) $xyz = 1$, $(1, 1, 1)$
c) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, $(1, 2, -3)$
d) $xy + yz + xz = 1$, $(2, 3, -1)$
6. Demostrar que el vector $1/\sqrt{2}(j - k)$ es un vector normal unitario a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en el punto $(0, 0, 2)$
7. Hallar los puntos en la superficie

$$x^2 + 2xy - y^2 + 3z^2 - 2x + 2y - 6z - 2 = 0$$

donde el plano tangente es paralelo al plano xy
8. Demostrar que todo plano tangente al cono $x^2+y^2 = z^2$ pasa por el origen.
9. Sea $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 3x + 2y + z$. Hallar los puntos tales que $||\nabla g|| = 0$.
10. Hallar D_uf en el punto P dado, donde u es un vector unitario en la direccion PQ. Ademas hallar el valor de D_vf, donde v es un vector unitario tal que D_vf sea máximo.
a) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + e^z$, $P(0, 1, 0)$, $Q(-4, 2, 3)$
b) $f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + x \cos x$, $P(2, 1, 0)$, $Q(1, 4, 2)$

11. Una distribución de temperaturas en el espacio esta dada por

$$f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos(2x) + 4\cos(3y).$$

En el punto $(\pi/3, \pi/3)$, encontrar la dirección del mayor incremento de temperatura y la de mayor decrecimiento de temperatura.
12. Sea $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. ¿Cual es la dirección de mayor crecimiento de la función en el punto $(2,-1,2)$?. ¿Cual es la derivada direccional de f en esta dirección y en este punto.
13. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. ¿Cual es la dirección en la que f crece mas rapidamente en el punto $(-1,1)$. ¿Cual es la derivada direccional de f en esa dirección.
14. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada y en el punto dado
a) $z = 3x^2 - y^2 - 2$, $(-1,2,3)$
b) $xy + yz + xz = 1$, $(2,3,-1)$
15. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en el punto $(3,1,10)$ es $z = 6x + 3y - 11$
16. Hallar el punto o los puntos, de la superficie

$$z = x^2 - 2y^2 + 3y - 6$$

donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 3y + z = 5$.
17. Calcular la aproximación lineal de la función $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2,1)$ y con ella aproxime $f(1{,}95, 1{,}08)$.
18. Verifique la aproximación lineal en $(0,0)$.
a) $\frac{2x+3}{4y+1}$ *aprox* $3 + 2x - 12y$
b) $\sqrt{y + \cos^2 x}$ *aprox* $1 + \frac{1}{2}y$
19. Hallar el punto o los puntos (si es que existen) de la superficie

$$x^2 + 2xy - y^2 + 3z^2 - 2x + 2y - 6z - 2 = 0$$

donde el plano tangente es paralelo al plano yz.
20. Demostrar que toda recta normal a la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

pasa por el origen.