Cálculo de Varias Variables
Unidad 3:Derivadas parciales y regla de la cadena

1. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones
a) $f(x,y) = \sin(x \sin y)$
b) $f(x,y,z) = x^{yz}$
c) $f(x,y,z) = \sin(x \sin(y \sin z))$
d) $f(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} (e^{3t} + 3t)dt$
En los ejercicios 2-5, encontrar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$
2. $f(x,y) = 5 \cos x \cos y$
3. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$
4. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{1+y}$
5. $f(x,y) = \cos(xe^y)$
6. Encontrar f_x, f_y, f_z para la función $f(x,y,z) = x^2y - 2x^2z + 3xyz - y^2z + 2xz^2$
En los ejercicios 7-9, encontrar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en los puntos indicados
7. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(0,0)$, $(a/2, a/2)$
8. $z = \ln \sqrt{1 + xy}$, $(1,2)$, $(0,0)$
9. $z = e^{ax} \cos(bx + y)$, $(2\pi/b, 0)$
10. Si $z = \ln(y/x)$, demostrar que $xz_x + yz_y = 0$
11. Si $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1^k + a_2x_2^k + \cdots + a_nx_n^k$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números, demostrar que

$$x_1P_{x_1} + x_2P_{x_2} + \cdots + x_nP_{x_n} = kP$$

12. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Usando la definición encuentra $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
En los problemas 19 y 21 verificar que se cumple que $f_{xy} = f_{yx}$
13. $f(x,y) = x^3 + 7x^2y - 2xy^2 + y^2$
14. $f(x,y) = e^{xy} \sin x + e^{xy} \cos y$
15. Dada la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, verificar que

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

16. Verificar que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

para la función $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$

17. Hallar las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = 2$

b) $f(x, y) = x + y$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = e^{xy}$

e) $f(x, y) = (x, y)$

f) $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

g) $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

18. Escribir la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones

a) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x, y) = f(x, u(x, y))$

b) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x, y) = f(x, u(x), v(x))$

c) $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$

19. Calcular $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ y

$$f(u, v)\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2},\ u(x, y) = e^{(-x-y)},\ v(x, y) = e^{xy}$$

20. Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ \gamma$, en cada caso

a) $f(x, y = xy, \gamma(t) = (e^t, \cos t)$

b) $f(x, y) = x\exp(x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = (t, -t)$

21. Sea $f : R^3 \to R$ diferenciable. Haciendo la sustitución

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\phi$$

(coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$ calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$.

22. Encontrar $\frac{\partial}{\partial s}(f \circ T)(0, 0)$, donde $f(u, v) = \cos u \sin v$ y $T(s, t) = (\cos t^2 s, \ln\sqrt{1 + s^2})$

23. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Demostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen.

b) Si $g(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable y $(f \circ g)'(0, 0) = ab^2/(a^2 + b^2)$.

24. Supongase que $u = f(x+at, y+bt)$, donde a y b son constantes. Demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}$$

25. Utilizar la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales indicadas.
a) $z = f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$, $x = r + 3s - t$, $y = r - 2s + 3t$, $z_r,\ z_s,\ z_t$
b) $w = f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3$, $x = s^2 - t^2$, $y = s^2 + t^2$, $z = 2st$, w_s y w_t
26. Sean g y f funciones diferenciables de R en R. Sea $\phi(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$. Demostrar que $\phi_{tt} = \phi_{xx}$. (esta ecuación de onda)